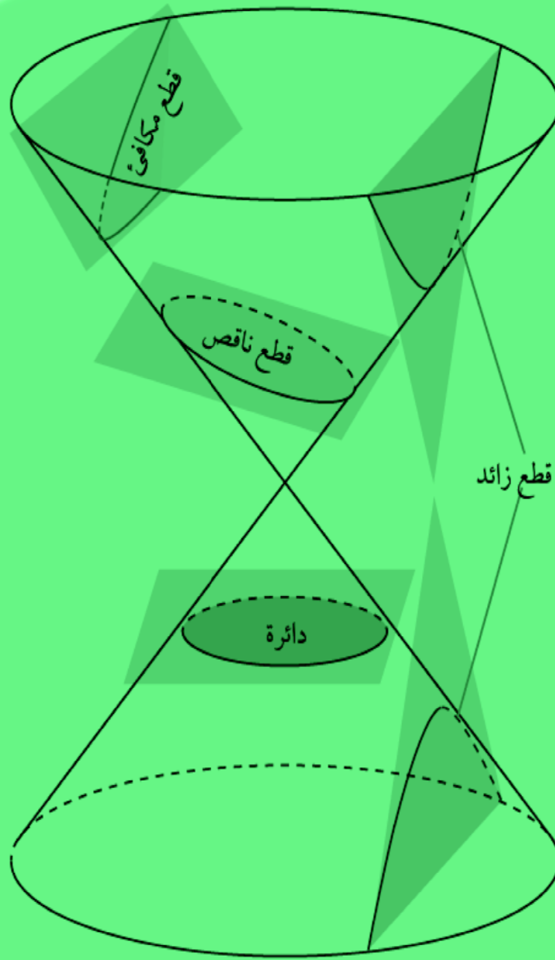
الهندسة التحليلية

الأستاذ أحمد أبو نبوت



2014 م - ١٤٣٥هـ



وما توفيقي ولا اعتمادي إلاّ على الله الذي بيده مفاتيح كل شيء سبحانه وتعالى له الحمد وأسأل الله أن يرحمني ويتقبل مني ويحشرني مع الصالحين.

كتاب الهندسة التحليلية الذي وفقني الله وكتبته أرجو من الله أن يكون فيه الفائدة.

يضمن الكتاب مواضيع في الهندسة أهمها القطوع والتحويلات الهندسية الشهيرة، لما لها من أهمية

كما تطرقت إلى تطبيقات على معادلة المستقيم كالبرمجة الخطية.

وقد جعلت للقطوع أكثر من فصل ،منها هندسي كصفات القطوع ،وأخرى تحليلي وحتى القسم التحليلي فصلت بين القطع عندما يكون محوره المحرقي يوازي أحد المحورين الإحداثيين أو مائل عليهما

واعتمدت التعريف المشترك للقطوع في استخراج معادلة القطع ، وقد زودت معظم الفقرات والتمارين برسوم هندسية تساعد على ربط المعلومات المجردة بالمحسوسة، فتساعد في فهم الفقرة أو التمرين

وأذكر أن الهندسة التحليلية لاتقتصر على معادلة المستقيم ومعادلات القطوع، لكنها أمثلة مناسبة وشائعة في مناهج الرياضيات ،لذلك كان الاهمام منصب عليها.

أتمنى أن أكون قد وفقت في كتابة هذا الكتاب راجياً من الله أن يتقبل عملي وان يفيد طلبتنا ويساعدهم في دراستهم للهندسة التحليلية

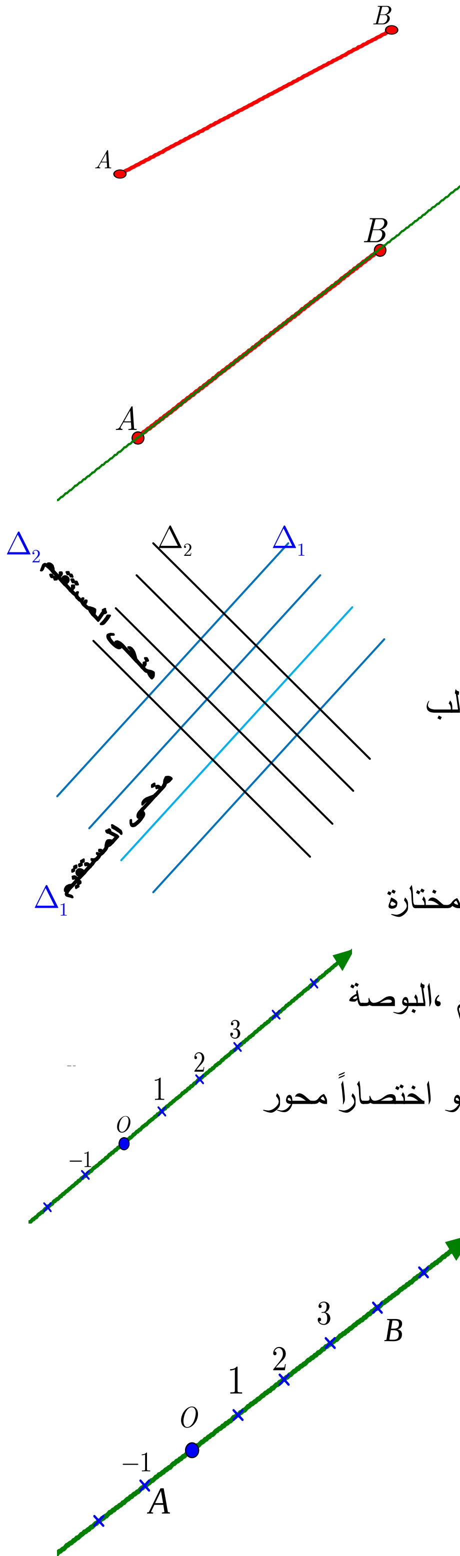
لاتنسونا من صالح دعائكم

الأستاذ أحمد أبو نبوت

فهرس مواضيع كتاب الهندسة التحليلية

الفصل الأول : المتجهات في المستوي

أولاً: جملة المحاور الإحداثية:



نرمز لمجموعة نقط المستوي (κ)

① إذا رسمنا خط النظر بين نقطتين سنعتبر هذا الخط

القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين

وإذا مددنا هذه القطعة المستقيمة من جهتيها إلى

أبعد النقاط الممكنة نحصل على خط نسميه المستقيم

② كل مجموعة مؤلفة من جميع المستقيمات المتوازية

تشكل منحى نسميه منحى لكل مستقيم من هذه المجموعة

③ إذا وجهنا حركة السير على المستقيم اتجاه موجب وعكسه سالب

ووضعنا رأساً للاتجاه الموجب (رأس النبل)

وقسمناه إلى أقسام متساوية، كل قسم يعبر عن واحدة القياس المختارة

(واحدة من وحدات القياس المتعارف عليها،المتر ،السنتمتر، القدم، البوصة،

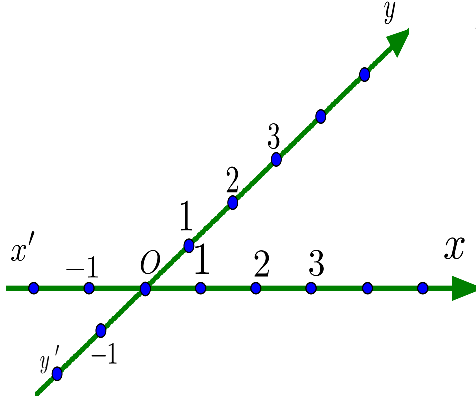
الساعة وغيرها من الوحدات) ونقطة مبدأ ، نسميه محوراً موجهاً أو اختصاراً محور

④ القياس الجبري لقطعة على محور موجه

مثال: القطعة المرسومة في الشكل المجاور طولها $AB = 5$

أما القياس الجبري $\overline{AB} = 5$ و $\overline{BA} = -5$

⑤الجملة الإحداثية:



عبارة عن محورين غير متوازيين يلتقيان في مبدأ كل منهما

وتحديث المستوي هو أن نتخذ لهذا المستوي

جملة محورين يصبح كل نقطة في المستوي

لها قياس يميّزها عن غيرها

نسمي هذا القياس إحداثيات النّقطة

وإحداثيات نقطة في المستوي المحدّث في هذه الجملة

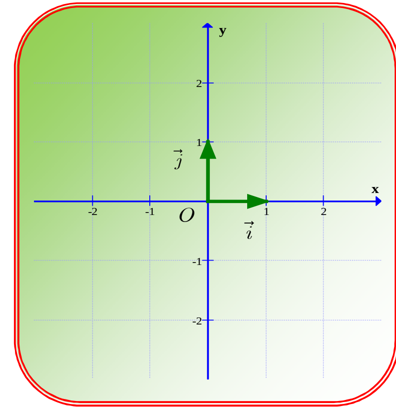
نحصل عليه بإسقاط النّقطة على المحورين

نسقط النّقطة على المحور $x'x$ توازياً مع المحور $y'y$

و على المحور $y'y$ توازياً مع المحور $x'x$

كما في الشّكل: $B(-1,3)$, $A(3,2)$

⑥ الجملة المتجانسة : $\left\{\vec{i}(1,0),\vec{j}(0,1)\right\}$



نرمز $(o,\vec{i},\vec{j})$ونسميه مَعلَم متجانس للمستوي

محاورها متعامدة ، للمحورين نفس طول واحدة القياس

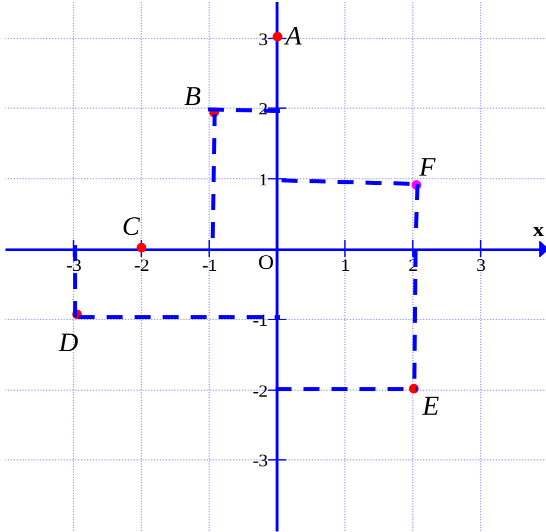
$|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$ في المستوي (κ)

المتّجه $\vec{i}$ محمول على المحور $x'x$ له نفس جهة المحور

المتّجه $\vec{j}$ محمول على المحور $y'y$ له نفس جهة المحور

سنعتبر الجُّملة الّتي تُحدِّث المستوي جملة قانونيّة ما لم يرد في المسألة خلاف ذلك

⑦ إحداثيات نقطة في المسوي المحدّث بمعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$



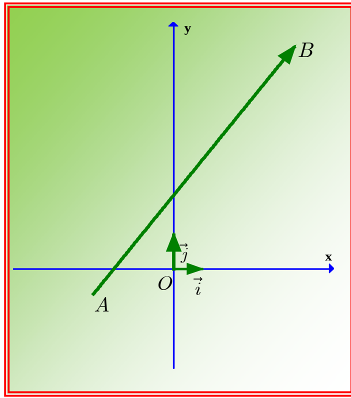
لاحظ الشّكل المجاور الّذي يبيّن

الإحداثيات لمجموعة من نقط المستوي

$A(0,3)$, $B(-1,2)$, $C(-2,0)$, $D(-3,-1)$

$E(2,-2)$, $F(2,1)$, $o(0,0)$

ثانياً: المتّجهات:



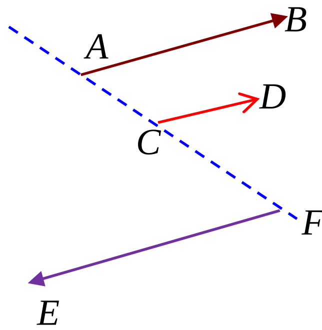
①**المتّجه** (الشّعاع): المتّجه $\vec{AB}$ هو الثّنائية النّقطية (A,B) ويمكن أن نتخيله بأنّه شعاع النظر المنطلق من النّقطة A ويستقر في النّقطة B ونمثله بالقطعة المستقيمة الموجّهة من A نحو B كما في الشكل المجاور

نسمي المستقيم المار من النقطتين A و B حامل المتجه

② منحى المتجه :

منحى المتجه هو منحى المستقيم الحامل للمتجه

ويكون للمتجهين المتوازيين نفس الجهة إذا كان المتجهان في جهة واحدة بالنسبة للمستقيم المار من مبدأيهما ولهما جهتين متعاكستين إذا كان المتجهان في جهتين مختلفتين بالنسبة للمستقيم المار من مبدأيهما

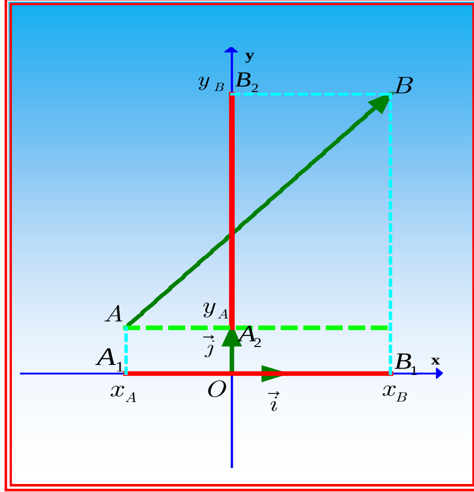


$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس الاتجاه

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FE}$ مختلفان بالاتجاه

للمتجهات $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{FE}$ لها نفس المنحى

③ إحداثيات المتّجه: $\overrightarrow{AB}$



بعملية إسقاط لبداية المتّجه ونهايته على المحورين الإحداثيّين

كما في الشّكل نجد : $\overline{A_1B_1} = x_B - x_A$

وهو القياس الجّبري لمسقط المتّجه على محور الفواصل

ونجد: $\overline{A_2B_2} = y_B - y_A$

وهو القياس الجّبري لمسقط المتّجه على محور التّرتيب

نكتب عندئذ $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$

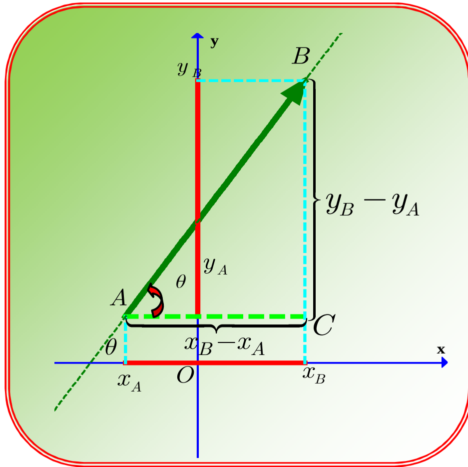
أو $\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A \ , \ y_B - y_A\right)$ ونسمي الثّنائية $\left(x_B - x_A \ , \ y_B - y_A\right)$ إحداثيات المتّجه $\overrightarrow{AB}$

مثال: إذا كانت $A(2,-1) \ , \ B(-3,4) \ , \ C(1,5)$ أوجد إحداثيات المتّجهات $\overrightarrow{AB} \ , \ \overrightarrow{AC} \ , \overrightarrow{CB}$

الحل:

$$\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A \ , \ y_B - y_A\right) = (-5,5)$$
$$\overrightarrow{AC}\left(x_C - x_A \ , \ y_C - y_A\right) = (-1,6)$$
$$\overrightarrow{CB}\left(x_B - x_C \ , \ y_B - y_C\right) = (-4,-1)$$

④ ميل المتّجه :



ميل المتّجه $\overrightarrow{AB}$ هو $m = \tan\theta$ حيث θ الزاوية التي يصنعها

المستقيم مع الاتجاه الموجب للمحور $x'x$

أي $\theta \in [0,\pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ و $\theta = \left(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{AB}}\right)$

من المثلّث ABC نستنتج أنّ $m = \tan\theta = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

مثال : أوجد ميل المتجه $\overrightarrow{AB}$ حيث $A(2,1)\ ,\ B(-3,5)$

الحل: $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ ومنه $m=\dfrac{5-1}{-3-2}=-\dfrac{4}{5}$

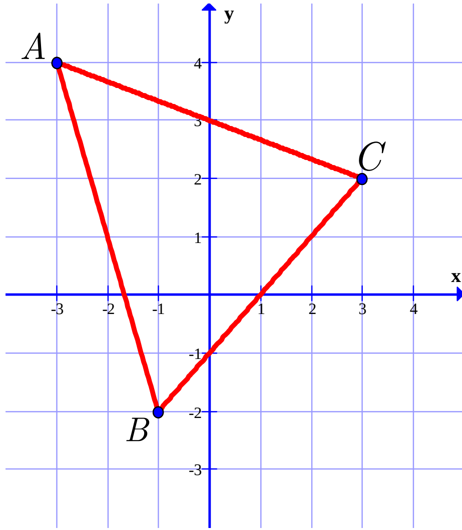
⑤ طويلة المتّجه :

طويلة المتّجه $\overrightarrow{AB}$ نرمز لها $|\overrightarrow{AB}|$ أو AB

إذا لاحظنا المثلّث ABC وحسب مبرهنة فيثاغورث

$$AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

مثال: أوجد أطوال أضلاع المثلّث ABC



إذا كانت $A(-3,4)\ ,\ B(-1,-2)\ ,\ C(3,2)$

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

$$AB=\sqrt{(-1+3)^2+(-2-4)^2}=2\sqrt{10}$$

$$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$$

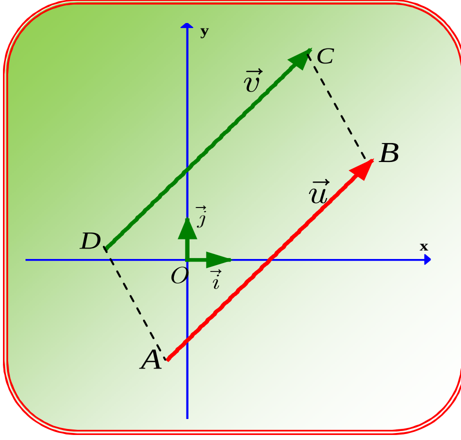
$$AC=\sqrt{(3+3)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{10}$$

$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}$ ، $BC=\sqrt{(2+2)^2+(3+2)^2}=\sqrt{41}$

ملاحظة : إذا كانت زاوية المتّجه مع المحور $x'x$ هي θ فإن إحداثيات المتّجه $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}(|\overrightarrow{AB}|\cos\theta,|\overrightarrow{AB}|\sin\theta)$$

⑥ تساوي متّجهين :



إذا كان $\vec{u}(x_2\ ,\ y_2)\ ,\ \vec{v}(x_1\ ,\ y_1)$

نقول إن المتّجهين متساويان ونكتب $\vec{v}=\vec{u}$

إذا وفقط إذا كان $x_1=x_2$ و $y_1=y_2$

ويكافئ (للمتجهين نفس الطول والمنحى والجهة)

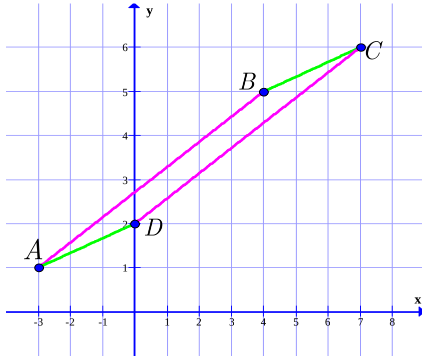
(لاحظ الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع لتوازي ضلعين متقابلين وتساوي طوليهما

مما سبق نكتشف طريقة لبرهان الشّكل الرّباعي المعلومة إحداثيّات رؤوسه بأنه متوازي أضلاع

إذا وفقط إذا $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$)

مثال①: لدينا الرّباعي $ABCD$ الّذي إحداثيّات رؤوسه

$D(0,2)\ ,\ C(7,6)\ ,\ B(4,5)\ ,\ A(-3,1)$ أثبت أنّه متوازي أضلاع



الحل : $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A\ ,\ y_B-y_A)$ ومنه $\overrightarrow{AB}=(-7,\ 4)$

$\overrightarrow{DC}=(x_C-x_D\ ,\ y_C-y_D)$ ومنه $\overrightarrow{DC}=(-7,\ 4)$

ومنه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ فالشّكل $ABCD$ متوازي أضلاع

مثال② : أوجد قيمة العدد الحقيقي λ عندما يتساوى المتّجهين $\vec{v}(\lambda^2+\lambda\ ,\ \lambda)$ و $\vec{u}(2\ ,\ \lambda^2)$

الحل : المتّجهان متساويان $\lambda^2+\lambda=2$ و $\lambda^2=\lambda$

هذه الجّملة تكافئ $\left((\lambda+2)(\lambda-1)=0\right.$ و $\left.\lambda(\lambda-1)=0\right)$ والحل المشترك لها $\lambda=1$

وهي القيمة الوحيدة الّتي يتحقق من أجلها تساوي المتّجهين

⑥ الارتباط الخطّي:

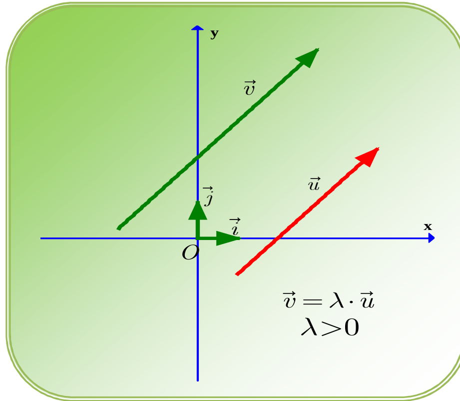
نقول عن المتّجهين $\vec{u}$, $\vec{v}$ إنّهما مرتبطان خطّياً إذا وفقط إذا كان لهما نفس المنحى

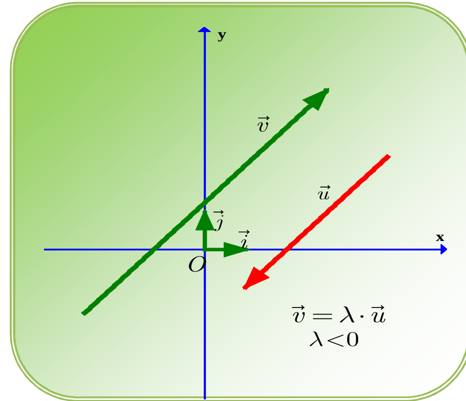
أي حامليهما متوازيين

وعندئذ $\vec{u}$, $\vec{v}$ مرتبطان خطياً يكافئ يوجد عدد حقيقي $\lambda \in \mathbb{R}$ بحيث $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$

ونلاحظ : أن المتّجه $\vec{0}$ يرتبط خطياً مع أي متّجه آخر

عندما $\lambda < 0$ يكون $\vec{u}$, $\vec{v}$ لهما جهتين متعاكستين عندما $\lambda > 0$ يكون $\vec{u}$, $\vec{v}$ لهما نفس الجّهة





⑦الجّداء السّلمي لمتّجهين:

نعرف الجّداء السّلمي للمتّجهين $\vec{u}$, $\vec{v}$ إذا كانت قياس الزّاوية بينهما θ حيث $\theta \in [0,\pi]$

بأنّه العدد الحقيقي $\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos\theta$

نتائج :

① $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$

② إذا تعامد المتجهان $\vec{v}$ و $\vec{u}$ فإن $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ حيث($\vec{v}$ و $\vec{u}$ غير معدومين)

إذ كان $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ فإن $\vec{v} = \vec{0}$ أو $\vec{u} = \vec{0}$ أو المتّجهين متعامدين

③ إذا توازى المتّجه $\vec{v}$ مع المتجه $\vec{u}$ فإن:

$\vec{v}\cdot\vec{u}=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|$ عندما يكون لهما نفس الجّهة أي عندها $\theta=0$

أو $\vec{v}\cdot\vec{u}=-|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|$ عندما يكون لهما جهتين مختلفتين أي عندها $\theta=\pi$

في الحالتين: إذا كان $\vec{v}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطياً فإن $|\vec{v}\cdot\vec{u}|=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|$

④ $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2$ وفي المعلم المتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

$\vec{j}\cdot\vec{j}=|\vec{j}|^2=1$, $\vec{i}\cdot\vec{i}=|\vec{i}|^2=1$ و $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$

⑥ الزّاوية بين متّجهين:

لحساب الزاوية θ بين المتّجهين من عبارة الجّداء السّلمي نجد : $\cos\theta=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|}$

⑦العبارة التّحليلية للجّداء السّلمي إذا كان المعلم متجانس:

إذا كان $\vec{v}(x_1,y_1)$ ، $\vec{u}(x_2,y_2)$ فإن $\vec{v}\cdot\vec{u}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$

البرهان: $\vec{v}\cdot\vec{u}=\left(x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}\right)\cdot\left(x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j}\right)$

$$\vec{v}\cdot\vec{u}=x_1\cdot x_2\left(\vec{i}\right)^2+y_1\cdot y_2\left(\vec{j}\right)^2+\left(x_1y_2\vec{i}\cdot\vec{j}+y_1x_2\vec{i}\cdot\vec{j}\right)$$

لكن $\vec{j}\cdot\vec{j}=|\vec{j}|^2=1$, $\vec{i}\cdot\vec{i}=|\vec{i}|^2=1$ و $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$

إذاً $\vec{v}\cdot\vec{u}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$

نتيجة : بما أن $|\vec{v}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$, $|\vec{u}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$ فإن :

$$\cos\theta=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

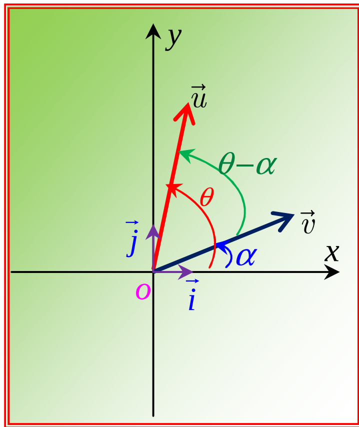
مثال : احسب θ الزّاوية بين المتّجهين $\vec{v}(\sqrt{3},1)$ و $\vec{u}(-1,-\sqrt{3})$

الحل : $\cos\theta = \dfrac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

$\cos\theta = \dfrac{-\sqrt{3} - \sqrt{3}}{(2)\cdot(2)} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$

⑥ تطبيق على الجدّاء السّلمي: حساب النّسب المثلثيّة لفرق زاويتين

إذا كان $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 1$ وكانت θ زاوية المتّجه $\vec{u}$ مع المحور $x'x$ و وكانت α زاوية المتّجه $\vec{u}$ مع المحور $x'x$ فإنّ :



$\vec{u}(\cos\theta, \sin\theta)$ و $\vec{v}(\cos\alpha, \sin\alpha)$

$\vec{v}\cdot\vec{u} = |\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(\theta-\alpha) = \cos(\theta-\alpha)$

ولكن $\vec{v}\cdot\vec{u} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$



ومنه $\cos(\theta-\alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha$....❶

نتائج :

① بما أنّ $\cos(\theta-\alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha$ أياً كانت α,θ من $\mathbb{R}$

فهي صحيحة عندما نبدل $-\alpha$ بـ α نجد:

$\cos(\theta+\alpha) = \cos\theta\cos(-\alpha) + \sin\theta\sin(-\alpha)$

لكن $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

نستنتج $\cos(\theta+\alpha) = \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha$....❷

② بما أنّ $\cos(\theta-\alpha)=\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha$ أياً كانت α,θ من $\mathbb{R}$

فهي صحيحة عندما نعوض $\frac{\pi}{2}-\alpha$ بـ α نجد:

$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cos(\alpha)+\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\sin(\alpha)$$

لكن $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ ، $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ و $\cos\left(\theta+\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\theta+\alpha)$

نستنتج $\sin(\theta+\alpha)=\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha$....❸

وبتعويض $-\alpha$ بـ α نجد $\sin(\theta+\alpha)=\sin\theta\cos(-\alpha)+\cos\theta\sin(-\alpha)$

لكن $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ ، $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

نستنتج $\sin(\theta-\alpha)=\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha$....❹

دساتير الجّمع:

$\cos(\theta-\alpha)=\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha$....❶

$\cos(\theta+\alpha)=\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha$....❷

$\sin(\theta+\alpha)=\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha$....❸

$\sin(\theta-\alpha)=\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha$....❹

③ نتائج أخرى : من دساتير الجّمع:

عندما نعوض في ❶ $\alpha=\theta$ نجد $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

عندما نعوض في ❷ $\alpha=\theta$ نجد $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

عندما نعوض في ❸ $\alpha=\theta$ نجد $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

عندما نجمع❶ و ❷ نجد : $2\cos\theta\cos\alpha=\cos(\theta+\alpha)+\cos(\theta-\alpha)$

عندما نجمع و نجد : $2\sin\theta\cos\alpha=\sin(\theta+\alpha)+\sin(\theta-\alpha)$

عندما نطرح❶ من ❷ نجد: $2\sin\theta\sin\alpha=\cos(\theta-\alpha)-\cos(\theta+\alpha)$

عندما نطرح ❹ من ❸ نجد : $2\cos\theta\sin\alpha = \sin(\theta+\alpha) - \sin(\theta-\alpha)$

نسمي العلاقات الأربعة الأخيرة دساتير تحويل الجّداء إلى مجموع وهي:

$$2\cos\theta\cos\alpha = \cos(\theta+\alpha) + \cos(\theta-\alpha)$$

$$2\sin\theta\cos\alpha = \sin(\theta+\alpha) + \sin(\theta-\alpha)$$

$$2\sin\theta\sin\alpha = \cos(\theta-\alpha) - \cos(\theta+\alpha)$$

$$2\cos\theta\sin\alpha = \sin(\theta+\alpha) - \sin(\theta-\alpha)$$

④ إذا فرضنا $y=\theta-\alpha$, $x=\theta+\alpha$ نجد بجمعهما $\theta=\dfrac{x+y}{2}$ وبطرحهما $\alpha=\dfrac{x-y}{2}$

بالتّعويض في دساتير تحويل الجّداء إلى مجموع نجد أربعة دساتير أخرى تسمى

دساتير تحويل المجموع إلى جداء

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

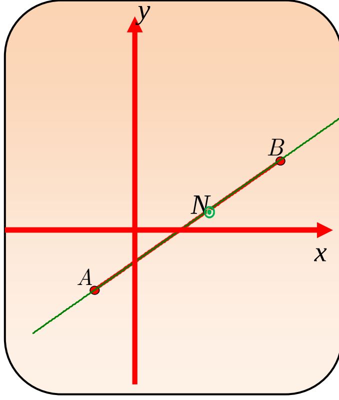
$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

وهكذا يمكن استنتاج علاقات مثلثية كثيرة بعمليات تركيب وتحليل مناسبة بين العلاقات السابقة

⑦ النّقطة القاسمة لقطعة مستقيمة بنسبة معلومة



لتكن القطعة المستقيمة [AB] حيث $A(x_A, y_A)$ ، $B(x_B, y_B)$

نقول إنّ النّقطة $N(x_N, y_N)$ تقسم [AB] لجهة A بنسبة معلومة k

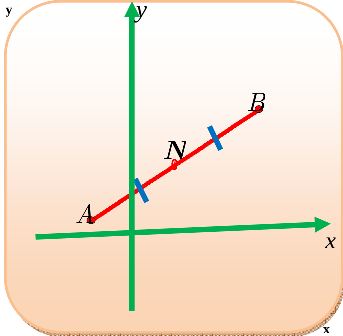
إذا كان $\overrightarrow{AN} = k \cdot \overrightarrow{NB}$

ومنه $(x_N - x_A, y_N - y_A) = k \cdot (x_B - x_N, y_B - y_N)$

أي $\begin{cases} x_N - x_A = k(x_B - x_N) \\ y_N - y_A = k(y_B - y_N) \end{cases}$

فتكون إحداثيات النّقطة القاسمة $N(x_N, y_N)$

$$\begin{cases} x_N = \dfrac{x_A + k \cdot x_B}{1+k} \\ y_N = \dfrac{y_A + k \cdot y_B}{1+k} \end{cases} \quad : \; k \neq -1 \; , \quad k \neq 0$$



المناقشة

1 من أجل $k = 1$ يكون $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NB}$ تكون

N منتصف [AB] وإحداثيي منتصف القطعة المستقيمة

$$x_N = \frac{x_A + x_B}{2} \quad , \quad y_N = \frac{y_A + y_B}{2}$$

مثال: لدينا الرّباعي $ABCD$ الّذي إحداثيات رؤوسه $D(1,1)$ ، $C(7,7)$ ، $B(3,7)$ ، $A(-3,1)$

أوجد إحداثيات منتصف $[AC]$ و إحداثيات منتصف $[BD]$ ماذا تستنتج

الحل: بفرض N منتصف $[AC]$ فإن $y_N = \dfrac{y_A + y_C}{2}$ ، $x_N = \dfrac{x_A + x_C}{2}$

ومنه $y_N = \dfrac{1+7}{2}$ ، $x_N = \dfrac{-3+7}{2}$ أي $N(2,4)$

بفرض M منتصف $[BD]$فإن $\quad y_M = \frac{y_B + y_D}{2} \quad , \quad x_M = \frac{x_B + x_D}{2}$

ومنه $\quad y_M = \frac{7+1}{2} \quad , \quad x_M = \frac{3+1}{2}$ أي $M(2,4)$

للرباعي $ABCD$ قطرين $[BD]$ ، $[AC]$ متناصفين (لهما نفس المنتصف)

فالرّباعي $ABCD$متوازي أضلاع

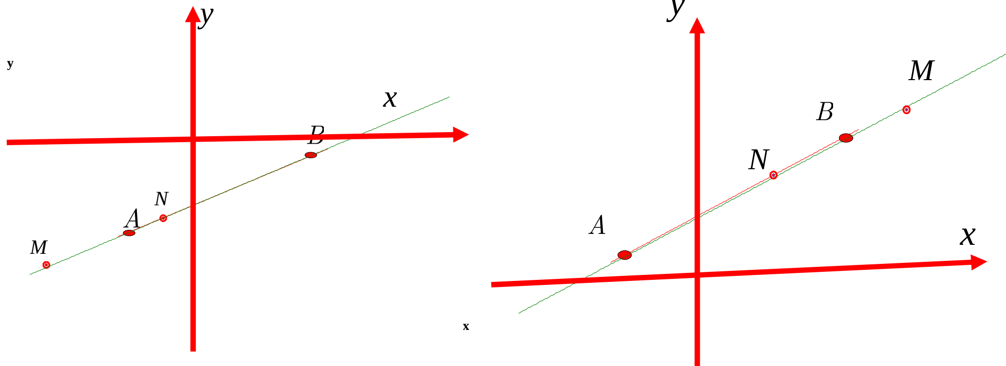
2 من أجل $k \in]0,+\infty[$ تكون N داخل القطعة المستقيمة $[AB]$

3 من أجل $k \in]-\infty,0[\setminus \{-1\}$ تكون N خارج القطعة المستقيمة $[AB]$

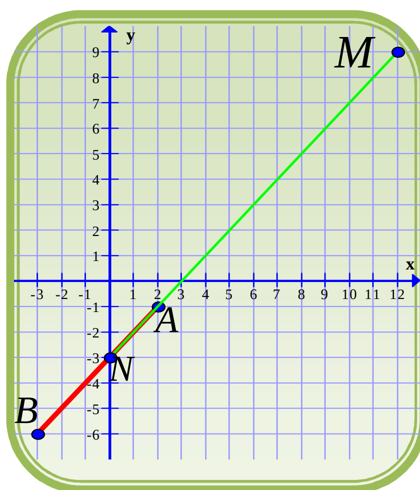
4 يوجد نقطتين N داخل القطعة المستقيمة $[AB]$ و M خارج القطعة المستقيمة $[AB]$

يقسمان $[AB]$ لجهة A بنسبة معلومة $k \in]0,+\infty[\setminus \{1\}$ بحيث :

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A - k \cdot x_B}{1-k} \\ y_M = \frac{y_A - k \cdot y_B}{1-k} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x_N = \frac{x_A + k \cdot x_B}{1+k} \\ y_N = \frac{y_A + k \cdot y_B}{1+k} \end{cases}$$



مثال : لتكن $B(-3,-6)$, $A(2,-1)$ أوجد النّقطة N القاسمة للقطعة المستقيمة $[AB]$ لجهة A من الداخل بنسبة $\frac{2}{3}$ وأوجد النّقطة M القاسمة للقطعة المستقيمة $[AB]$ لجهة A من الخارج بنفس النسبة $\frac{2}{3}$



الحل :

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - k\cdot x_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - k\cdot y_B}{1-k} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x_N = \dfrac{x_A + k\cdot x_B}{1+k} \\ y_N = \dfrac{y_A + k\cdot y_B}{1+k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{2-\frac{2}{3}\cdot(-3)}{1-\frac{2}{3}} = 12 \\ y_M = \dfrac{-1-\frac{2}{3}\cdot(-6)}{1-\frac{2}{3}} = 9 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x_N = \dfrac{2+\frac{2}{3}\cdot(-3)}{1+\frac{2}{3}} = 0 \\ y_N = \dfrac{-1+\frac{2}{3}\cdot(-6)}{1+\frac{2}{3}} = -3 \end{cases}$$

$N(0,-3)$, $M(12,9)$

تعريف : نقول عن نقطتين N و M تقسمان القطعة المستقيمة $[AB]$ تقسيماً توافقياً لجهة A

إذا وفقط إذا كانت N و M تقسمان $[AB]$ لجهة A بنسبة معلومة $k \in]0,+\infty[\setminus \{1\}$

عندئذ سيكون : $\frac{NA}{NB} = \frac{MA}{MB} = k$

نتيجة : إذا كانت النّقطتين N و M تقسمان القطعة المستقيمة $[AB]$ تقسيماً توافقياً لجهة A بنسبة معلومة $k \in]0,+\infty[\setminus \{1\}$ فإن النّقطتين N و M تقسمان القطعة المستقيمة $[AB]$ تقسيماً توافقياً لجهة B بنسبة معلومة $\frac{1}{k} \in]0,+\infty[\setminus \{1\}$ عندئذ سيكون : $\frac{NB}{NA} = \frac{MB}{MA} = \frac{1}{k}$

معادلة المستقيم

ندرس في الهندسة التحليلية قسم من مجموعة النّقط في المستوي والتي لها خاصيّة هندسيّة مميّزه

1 **المستقيم :** إذا كانت A نقطة من المستوي (κ) و $\vec{v}$ متّجه في المستوي ($\vec{v}\neq\vec{0}$)

المستقيم هو مجموعة نقط المستوي M التي تحقق $\overrightarrow{AM}$ يرتبط خطّياً مع $\vec{v}$

(نسمي المتّجه $\vec{v}$ الموازي المستقيم متّجه توجيه المستقيم حيث $\vec{v}\neq\vec{0}$

والمتّجه $\vec{n}$ العمودي على المستقيم ناظم المستقيم حيث $\vec{n}\neq\vec{0}$)

2 **تعيين المستقيم :**

يتعين المستقيم : إما بنقطتين مختلفتين ، أو بنقطة و(متّجه $\vec{v}$ يوازي المستقيم أو متّجه $\vec{n}$ عمودي

على المستقيم)

3 **معادلة المستقيم:**

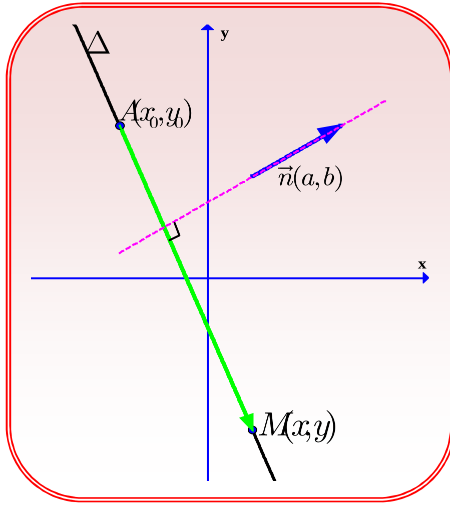
إذا كان المتّجه $\vec{n}$ عمودي على المستقيم Δ وليكن $\vec{n}(a,b)$ (ناظم للمستقيم) فإنّ المتّجه الذي

يوازي المستقيم (متّجه توجيه المستقيم) هو $\vec{v}(-b,a)$ أو $\vec{v}(b,-a)$ لأن $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$

الناظم ليس وحيداً كلّ متّجه غير معدوم يرتبط خطّياً مع $\vec{n}(a,b)$ هو متّجه ناظم للمستقيم

كل متّجه غير معدوم يرتبط خطّياً مع $\vec{v}(-b,a)$ هو متّجه توجيه للمستقيم

① معادلة مستقيم Δ يمر من نقطة $A(x_0,y_0)$ وله متّجه ناظم $\vec{n}(a,b)$ حيث $a\cdot b\neq 0$



إذا فرضنا $M(x,y)$ نقطة متغيّرة على المستقيم فإن

$\overrightarrow{AM}$ و $\vec{n}$ متعامدين ومنه $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

بما أن $\overrightarrow{AM}(x-x_0,y-y_0)$ فإنّ $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

بالإصلاح نجد $ax+by+\left(-ax_0-by_0\right)=0$

إذا فرضنا الثابت $\left(-ax_0-by_0\right)=c$

نجد معادلة المستقيم $\boxed{\Delta : ax+by+c=0}$

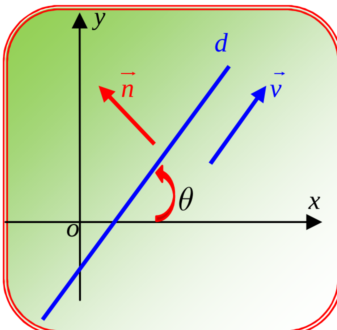
مثال : اكتب معادلة المستقيم	Δ	الذي يمر من النقطة	$A(-1,3)$	وله متجه ناظم هو	$\vec{n}(2,-1)$

الحل : معادلة المستقيم $\Delta : ax+by+c=0$ نبدل النّاظم $\vec{n}(a,b)$ نجد $\Delta : 2x-y+c=0$

بما أن Δ يمرّ من $A(-1,3)$ فهي تحقق معادلته أي: $2(-1)-(3)+c=0$

ومنه $c=5$ فمعادلة المستقيم المطلوبة $\Delta : 2x-y+5=0$

حل آخر: إذا فرضنا $M(x,y)$ نقطة متغيّرة على المستقيم Δ فإن $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{n}$ متعامدين ومنه $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ لكن $\overrightarrow{AM}(x+1,y-3)$



ومنه $2(x+1)-(y-3)=0$ بالإصلاح نجد $\Delta : 2x-y+5=0$

ملاحظة : ميل المستقيم هو $m=\tan\theta$ حيث $\theta\in[0,\pi[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

و $\theta=\left(\widehat{\vec{i},\vec{v}}\right)$ و $\vec{v}$ متّجه توجيه المستقيم وهو $\vec{v}(-b,a)$ أو $\vec{v}(b,-a)$

وميله $m=-\frac{a}{b}$ فإن ميل المستقيم $\Delta : ax+by+c=0$ هو $m=-\frac{a}{b}$

مثال : اكتب متّجه توجيه ومتّجه ناظم لمستقيم يصنع زاوية $\frac{\pi}{3}$ مع المحور $x'x$

ثم اكتب معادلة المستقيم إذا مرّ من النّقطة $N(-1,2)$

الحل : $\sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3} = m$ و $b \neq 0 : m = -\frac{a}{b}$ ومنه $\sqrt{3} = -\frac{a}{b}$ ومنه $a = -\sqrt{3}\,b$

من أجل $b \in \mathbb{R}^*$ نجد كل متّجه $\vec{v}(b,\sqrt{3}\,b)$ هو متّجه توجيه وكل متّجه $\vec{n}(\sqrt{3}\,b,-b)$ هو متّجه ناظم

لإيجاد معادلة المستقيم نعتبر $b=1$ فيكون $\vec{n}(\sqrt{3},-1)$ ناظم للمستقيم تكون المعادلة

$a\,x + b\,y + c = 0$ أي $\sqrt{3}\,x - y + c = 0$ وبما أن النّقطة $N(-1,2)$ تحقق معادلته فإن $c = \sqrt{3}+2$

ومنه معادلة المستقيم $\sqrt{3}\,x - y + \sqrt{3} + 2 = 0$

حالات خاصة لمعادلة المستقيم :

1 إذا كانت زاوية المستقيم مع المحور xx' هي $\theta = \frac{\pi}{2}$

كان المستقيم عمودي على المحور xx' وميله غير معرّف

ولإيجاد معادلته فهو يمر من $A(x_0,0)$ و $x_0 \in \mathbb{R}$

ومتّجه النّاظم لهذا المستقيم $\vec{i}(1,0)$

إذا فرضنا $M(x,y)$ نقطة متغيّرة على هذا المستقيم

فإن $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{i}$ متعامدان ومنه $\vec{i}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$

لكن $\overrightarrow{AM}(x-x_0,y)$ يكون $1\cdot(x-x_0) = 0$

معادلة المستقيم الموازي محور التّرتيب $y'y$ هي $x = x_0$

وفي الحالة التي ينطبق فيها المستقيم على محور التّرتيب $y'y$ فإن معادلته $(yy') : x = 0$

2 إذا كان $a \neq 0$ يمكن كتابة المعادلة $\Delta : a\,x + b\,y + c = 0$

بالصيغة $\Delta : y = -\dfrac{b}{a}x - \dfrac{c}{a}$ إذا فرضنا $m = -\dfrac{b}{a}$, $h = -\dfrac{c}{a}$

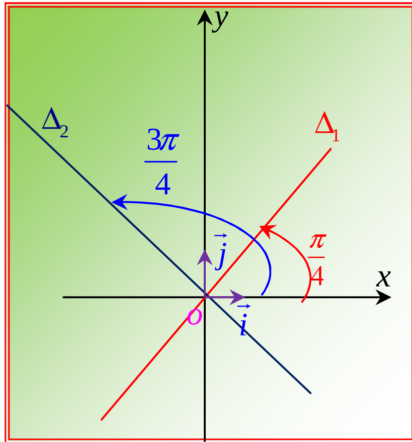
نكتب $\Delta : y = mx + h$ نسميها الصّيغة المختزلة لمعادلة المستقيم

ويكون لهذا المستقيم متّجه توجيه $\vec{v}(1, m)$ ومتّجه ناظم $\vec{n}(m, -1)$ ويقطع محور الترتيب في $(0, h)$

3 إذا كان المستقيم يمر من مبدأ الإحداثيات فإن $O(0,0)$

تحقق المعادلة $\Delta : a\,x + b\,y + c = 0$ نستنتج من ذلك أن $c = 0$

وبالتّالي تكون معادلة المستقيم المار من المبدأ $\boxed{\Delta : a\,x + b\,y = 0}$ أو $\boxed{\Delta : y = mx}$



وفي الحالة الخاصة إذا كان منصفاً للرّبعين الأول والثّالث

فإنّ $m = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$ ومعادلته $\boxed{\Delta_1 : y = x}$

و إذا كان منصفاً للربعين الثّاني والرّابع

فإنّ $m = \tan\dfrac{3\pi}{4} = -1$ ومعادلته $\boxed{\Delta_2 : y = -x}$

4 إذا كان المستقيم موازياً محور الفواصل $x'x$ فإن $m = \tan(0) = 0$

فإذا مرّ من $A(0, y_0)$ فإن معادلته $d : y = y_0$

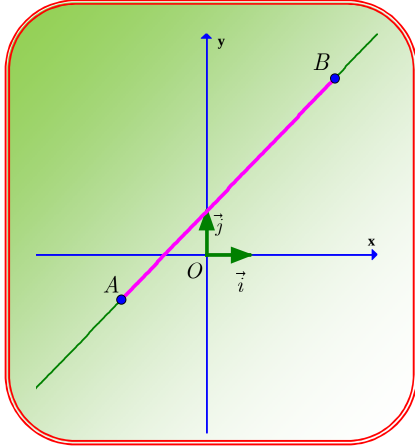
وإذا كان منطبقاً على محور الفواصل $x'x$ فإن $m = \tan(0) = 0$ ومعادلته $\boxed{(xx') : y = 0}$

② معادلة المستقيم المار من نقطة $A(x_0,y_0)$ وميله معلوم m

إذا فرضنا $M(x,y)$ نقطة متغيّرة على المستقيم Δ فإن $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{n}$ متعامدان ومنه $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

لكن $\overrightarrow{AM}(x-x_0,y-y_0)$ و $\vec{n}(m,-1)$

فإنّ معادلة المستقيم $m(x-x_0)-(y-y_0)=0$ أو $(y-y_0)=m(x-x_0)$



③ المستقيم الّذي يمر من نقطتين $B(x_B,y_B)$, $A(x_A,y_A)$

إن ميل المستقيم هو ميل المتّجه $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A\ ,\ y_B-y_A\right)$

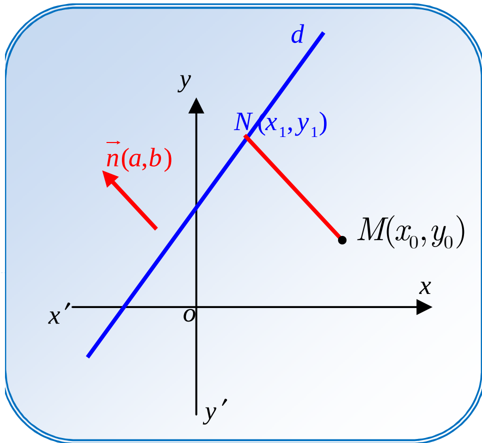
وهو $m=\tan\theta=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ وبالتّالي معادلة المستقيم (AB)

هي $(y-y_A)=m(x-x_A)$ أو $(y-y_B)=m(x-x_B)$

مثال : اكتب معادلة المستقيم (AB) الذي يمر من نقطتين $A(1,4)$, $B(2,-1)$

الحل : $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ ومنه $m=\dfrac{-1-4}{2-1}=-5$ معادلة المستقيم (AB) :

$(y-y_A)=m(x-x_A)$ ومنه $(y-4)=-5(x-1)$ بالإصلاح $5x+y-9=0$



4 بعد نقطة عن مستقيم

إذا كانت $N(x_1,y_1)$ المسقط القائم للنقطة $M(x_0,y_0)$

على المستقيم $d: ax+by+c=0$

الّذي ناظمه $\vec{n}(a,b)$ فإن $\overrightarrow{NM}$ يرتبط خطياً مع $\vec{n}$

عندئذ $|\vec{n}\cdot\overrightarrow{NM}|=|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{NM}|$ (نتيجة سابقة للجداء السلمي)

ومنه $|\overrightarrow{NM}|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{NM}|}{|\vec{n}|}$..........(1) لكن $\overrightarrow{NM}=(x_0-x_1,y_0-y_1)$

فيكون $\vec{n}\cdot\overrightarrow{NM}=a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)=ax_0+by_0-(ax_1+by_1)$

وبما أن $N\in d$ تحقق معادلته أي $ax_1+by_1=-c$ فإنّ:

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{NM}=a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)=ax_0+by_0+c$$

ولدينا $|\vec{n}|=\sqrt{a^2+b^2}$ بالتّعويض في (1) نجد

$$NM=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مثال : احسب بعد النّقطة $A(1,-3)$ عن المستقيم $\Delta:3x+4y-6=0$

الحل : $\ell(A,\Delta)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ومنه $\ell(A,\Delta)=\frac{|3-12-6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$

5 **الزاوية بين مستقيمين** هي الزّاوية الحادة بين المستقيمين أي $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

إذا كان $d_1:a_1x+b_1y+c_1=0$ و $d_2:a_2x+b_2y+c_2=0$

وكان النّاظمين : $n_2(a_2,b_2)$, $n_1(a_1,b_1)$ فإنّ الزاوية بين المستقيمين تساوي الزاوية بين ناظميهما

أي:

$$\cos\theta=\frac{|a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

مثال : أوجد قياس الزاوية بين منصف الربع الأول والمستقيم $\Delta:\sqrt{3}x+y-1=0$

الحل : لمنصف الرّبع الأوّل $y=x$ ناظم $n_2(1,-1)$

وللمستقيم $\Delta:\sqrt{3}x+y-1=0$ ناظم $n_1(\sqrt{3},1)$

ولدينا $\cos\theta=\frac{|a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

إذاً $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{|\sqrt{3}-1|}{\sqrt{3+1}\cdot\sqrt{1+1}}=\cos\theta$ ومنه $\cos\theta=\cos\frac{5\pi}{12}$ أي $\theta=\frac{5\pi}{12}$

6 العلاقة بين مستقيمين

إذا كان $d_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ و $d_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

سيكون الميلين لهذين المستقيمين $b_1 \neq 0$: $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ و $b_2 \neq 0$: $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$

ويمكن كتابة معادلتيهما $d_1 : y = m_1 x + h_1$ و $d_2 : y = m_2 x + h_2$

$d_1 // d_2$ (d_1 يوازي d_2) يكافئ $m_1 = m_2$ يكافئ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

$d_1 \perp d_2$ (d_1 عمودي على d_2) يكافئ $m_1 \cdot m_2 = -1$ يكافئ $a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$

d_1 هو d_2 (d_1 ينطبق على d_2) يكافئ $h_1 = h_2$, $m_1 = m_2$ يكافئ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

أمثلة :

المستقيمين $d_1 : 2x + y + 5 = 0$ و $d_2 : 2x + y - 8 = 0$ متوازيين لأن $m_1 = m_2 = -2$

المستقيمين $d_1 : x + 3y + 5 = 0$ و $d_2 : 3x - y - 8 = 0$ متعامدين لأن $m_1 \cdot m_2 = 3\left(-\frac{1}{3}\right) = -1$

خلاصة: الصّيغ المختلفة لمعادلة المستقيم:

	صيغة معادلة المستقيم	المعادلة	ميل المستقيم
1	الصّيغة العامة	$ax+by+c=0$	$m=-\frac{a}{b}$
2	الصّيغة المختزلة	$y=mx+b$	أمثال x
3	المستقيم المار من النقطة $N(x_0,y_0)$ والذي ميله m	$y-y_0=m(x-x_0)$	أمثال x
4	المستقيم المار من النقطتين $N(x_1,y_1)$ و$M(x_2,y_2)$	$y-y_1=m(x-x_1)$ أو $y-y_2=m(x-x_2)$	$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
5	المستقيم المارّ من المبدأ $O(0,0)$	$ax+by=0$ أو $y=m.x$	$m=-\frac{a}{b}$ أمثال x
6	المستقيم المماس للخط C في النّقطة $N(x_0,y_0)$ من C	$y-y_0=m(x-x_0)$	m قيمة المشتّق y' عند $(m=f'(x_0))$ نقطة التماس N
7	المستقيم الحامل لمنصف الربعين الأوّل والثّالث	$y=x$	$m=1$
8	المستقيم الحامل لمنصف الربعين الثّاني والرّابع	$y=-x$	$m=-1$
9	المستقيم الموازي للمحور $x'x$	$y=b$ ($b\in\mathbb{R}$ ثابت)	$m=0$
10	المستقيم الحامل للمحور $x'x$	$y=0$	$m=0$
11	المستقيم الموازي للمحور $y'y$	$x=a$ ($a\in\mathbb{R}$ ثابت)	ميل هذا المستقيم غير معرّف
12	المستقيم الحامل للمحور $y'y$	$x=0$	غير معرّف

مسألة 1:

اكتب معادلة المستقيم d الذي يمرّ من النّقطة $N(3,-2)$ في كلٍ من الحالات الآتية:

1) d يقبل المتّجه $\vec{u}=-\vec{i}+5\vec{j}$ شعاعاً موجهاً له

2) d عمود على المتّجه $\vec{v}=-3\vec{j}$

3) d له منحى المستقيم (AB) حيث $A(2,1)$ ، $B(3,3)$

4) d عمود على المستقيم (AB) حيث $A(2,1)$ ، $B(3,3)$

5) d يمرّ بنقطة تقاطع المستقيمين: $d_1: x+2y-5=0$ ، $d_2: 3x-y-1=0$

الحل :

1) $\vec{u}(-1,5)$ شعاعاً موجِّهاً للمستقيم ، بفرض $M(x,y)$ نقطة من المستقيم فإنّ $\overrightarrow{NM}$ و$\vec{u}$

مرتبطان خطياً تحقق إحداثيات المتّجهين العلاقة $x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 = 0$

بما أنّ $\overrightarrow{NM}(x-3, y+2)$ فإنّ $5(x-3)+(y+2)=0$ بالإصلاح نجد $5x+y-13=0$

حل آخر : $\vec{u}(-1,5)$ شعاعاً موجِّهاً للمستقيم يكون $\vec{n}(5,1)=(a,b)$ ، معادلة المستقيم من الصّيغة

$ax+by+c=0$ أي $5x+y+c=0$ وبما أن $N(3,-2)\in d$ إذن $3(5)-2+c=0$ ومنه $c=-13$

فتكون معادلة d هي $5x+y-13=0$

حل آخر: $\overrightarrow{NM}(x-3, y+2)$ عمود على $\vec{n}(5,1)$ يكون $\vec{n}\cdot\overrightarrow{NM}=0$

ومنه $5(x-3)+(y+2)=0$ بالإصلاح نجد $5x+y-13=0$

2) $\vec{v}(0,-3)$ ، معادلة المستقيم من الصّيغة $ax+by+c=0$ أو $-3y+c=0$

وبما أن $N(3,-2)\in d$ إذن $6+c=0 \Rightarrow c=-6$

فتكون معادلة d هي $-3y-6=0$ أو $y+2=0$

3) ميل المستقيم d يساوي ميل المستقيم (AB) بسبب التّوازي

لكن ميل المستقيم (AB) $m=\frac{3-1}{3-2}=2$

فتكون معادلة $d: y-y_N=m(x-x_N)$ فهي $y+2=2(x-3)$ أو $2x-y-8=0$

4) ميل المستقيم d مضروباً بميل المستقيم (AB) يساوي (-1)بسبب التّعامد

ومنه $m_d=-\frac{1}{2}$ فمعادلته $y+2=-\frac{1}{2}(x-3)$ أو $x+2y+1=0$

5) بالحل المشترك لمعادلتي d_1 و d_2 نقطة نجد التّقاطع هي النّقطة $M(1,2)$

ميل المستقيم d يساوي ميل (MN) فيكون $m=\frac{2+2}{1-3}=-2$

معادلة d هي $y-2=-2(x-1)$ أو $2x+y-4=0$

مسألة 2 :

في مستوٍ منسوب لمعلمٍ متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ لتكن النقاط $B(-2,1)$ ، $C(3,3)$ ، $A(-1,2)$

1) اكتب معادلة المستقيم d المار بالنقطتين A ، B ، ثم أوجد قياس زاوية المستقيم مع المحور $x\acute{x}$

2) احسب مساحة المثلث ABC حيث $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1cm$

3) اكتب معادلة المستقيم d_1 المار بالنقطة C والموازي للمتجه $\overrightarrow{AB}$

4) اكتب معادلة المستقيم d_2 المار بالنقطة A والموازي للمتجه $\overrightarrow{CB}$

5) عين النقطة D نقطة تقاطع المستقيمين d_1 ، d_2 ، ثم احسب مساحة الرباعي $ABCD$

الحل : 1) ميل المستقيم d يساوي $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-1}{-1+2}=1$ ومنه معادلة المستقيم d هي

$(y-y_A)=m(x-x_A)$ أي $y-2=1(x+1)$ أو $d:y=x+3$

بما أنّ $m=\tan\theta=1$ فإن $\theta=\frac{\pi}{4}$

2) مساحة المثلث ABC تساوي $s=\frac{1}{2}AB\cdot h_C$ حيث h_C بعد النقطة C عن المستقيم (AB)

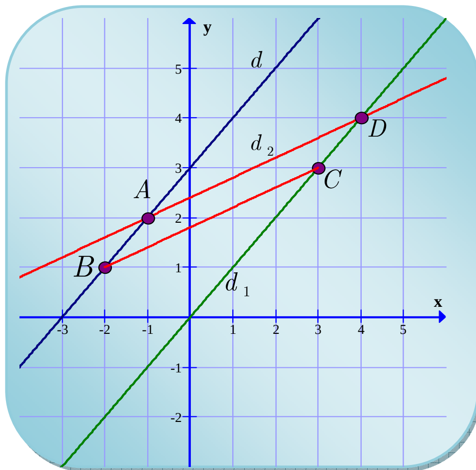
$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$ ومنه $AB=\sqrt{2}$

$h_C=\frac{|ax_C+by_C+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ معادلة $d:x-y+3=0$ يكون $h_C=\frac{|3-3+3|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$$s=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}\ (cm)^2$$

3) ميل المستقيم d_1 يساوي $m=1$ فتكون معادلته هي $y-3=x-3$ أو $(1)........d_1:y=x$

4) ميل المستقيم d_2 يساوي $m_2=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-1}{3+2}=\frac{2}{5}$ فتكون معادلته هي $y-2=\frac{2}{5}(x+1)$



أو $(2)..........d_2:y=\frac{2}{5}x+\frac{12}{5}$

5) بحل المعادلتين (1) و (2) نجد $\frac{2}{5}x+\frac{12}{5}=x$

ومنه $x=4$ إذن $D(4,4)$

الرباعي $ABCD$ هو متوازي أضلاع قاعدته $[BC]$

حيث $BC=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$ وارتفاعه هو بعد C عن $d_2:2x-5y+12=0$

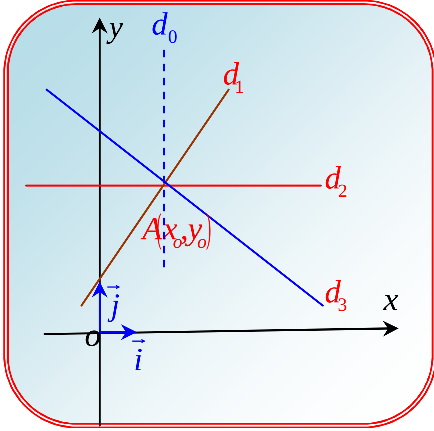
$\ell=\frac{|6-15+12|}{\sqrt{4+25}}=\frac{3}{\sqrt{29}}$ ومنه $S_{ABCD}=\sqrt{29}\times\frac{3}{\sqrt{29}}=3(cm)^2$

أو $S_{ABCD}=2s_{ABC}=3(cm)^2$

7 حزمة المستقيمات

أولاً : إذا كانت $A(x_o, y_o)$ نقطة ثابتة ، وكان m متغيراً وينتمي إلى $\mathbb{R}$ فإنّ المعادلة

$$y - y_o = m(x - x_o) \quad \ldots (1)$$



تمثّل مجموعة جميع المستقيمات المارّة بالنّقطة A ما عدا المستقيم

d_o المار بالنّقطة A والموازي للمحور $y'y$ ومعادلته $x = x_o$

وتسمى المجموعة $y - y_o = m(x - x_o)$ مع $x = x_0$

حزمة المستقيمات المتلاقية في A وتسمى A **مركز الحزمة**

مثال : أوجد مركز حزمة المستقيمات $(2-m)x + my + m + 4 = 0$

الحل: يمكن الحل باختيار مستقيمين من مستقيمات الحزمة والحل المشترك لهما هو مركز الحزمة

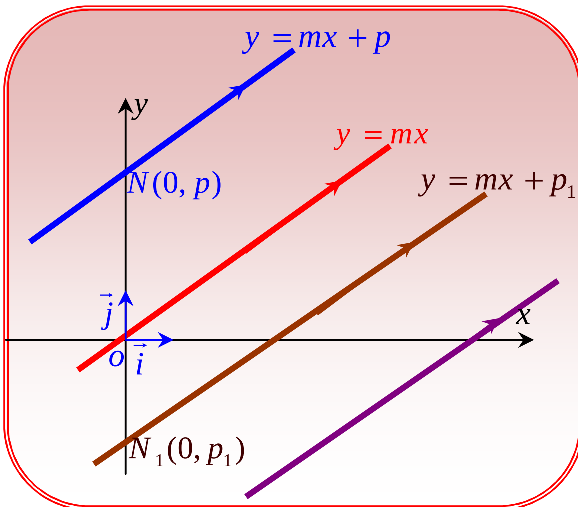
من أجل $m = 0$ نجد $x = -2$.....① مستقيم من مستقيمات الحزمة

من أجل $m = 2$ نجد $y = -3$.....② مستقيم من مستقيمات الحزمة

من المعادلتين ① , ② مركز الحزمة $(-2, -3)$

ثانياً : إذا كان m عدداً حقيقياً ثابتاً ، وكان p متغيراً وينتمي إلى $\mathbb{R}$ فإن المعادلة:

$$y = mx + p \quad \ldots (2)$$



تمثل مجموعة جميع المستقيمات

المتوازية والتي ميل كل منها يساوي m

وتسمى هذه المجموعة من المستقيمات

حزمة المستقيمات المتوازية أو ذات منحى مشترك

مسألة ①:

لتكن المعادلة $(\lambda+3)x+(2\lambda-1)y-5\lambda+6=0$ و $\lambda\in\mathbb{R}$

1) برهن أن هذه المعادلة تمثل مجموعة مستقيمات (D) متلاقية عين مركزها A_o

2) أوجد معادلة المستقيم d الذي ينتمي للمجموعة (D) في كلٍ من الحالات الآتية :

a) $d // x'x$ ، b) $d // y'y$ ، c) $O\in d$ ، e) $d\perp\Delta_1$

h) بعد النقطة $Q(2,2)$ عن المستقيم d يساوي $\sqrt{10}$

الحل :

1) المعادلة المفروضة هي من الشّكل : $ax+by+c=0$ حيث

$a=\lambda+3$ ، $b=2\lambda-1$ ، $c=-5\lambda+6$

أولاً : إذا كان $(a,b)=(0,0)$ فإن $(\lambda+3,2\lambda-1)=(0,0)$

يكافئ $\lambda=-3$ و $\lambda=\frac{1}{2}$ وهذا تناقض .

ثانياً : $(a,b)\neq(0,0)$ المعادلة تمثّل مستقيماً أياً كانت $\lambda\in\mathbb{R}$

من أجل $\lambda=-3$ يكون $y=3$ وهي معادلة مستقيم d_1

من أجل $\lambda=\frac{1}{2}$ يكون $x=-1$ وهي معادلة مستقيم d_2 ويكون $d_1\cap d_2=\{A_o(-1,3)\}$

نعوض إحداثيات A_o في المعادلة المفروضة نجد $\ell_1=(\lambda+3)(-1)+(2\lambda-1)(3)-5\lambda+6=0=\ell_2$

المعادلة محققة أياً كانت $\lambda\in\mathbb{R}$ فهي تمثّل مجموعة مستقيمات D متلاقية ومركزها هو النّقطة $A_o(-1,3)$.

حل آخر : تكتب المعادلة $\lambda(x+2y-5)+(3x-y+6)=0$ محققة من أجل كل $\lambda\in\mathbb{R}$

(فهي مطابقة بالمتغيّر λ) ونستنتج من ذلك

$$\begin{cases} x+2y-5=0 ....① \\ و \\ 3x-y+6=0 ....② \end{cases}$$ بالحل المشترك من ① $x=5-2y$ نبدل في ② نجد

$3(5-2y)-y+6=0$ ومنه $y=3$ نبدل في ① نجد $x=-1$

يكون مركز الحزمة $A_o(-1,3)$

حل آخر نشتق المعادلة بالنّسبة للمتغيّر λ

نجد $x+2y-5=0$ ومنه $x=5-2y$ نبدل في المعادلة المفروضة نجد

$$(\lambda+3)(5-2y)+(2\lambda-1)y-5\lambda+6=0$$

وبعملية الإصلاح نجد $y=3$ ومنه $x=-1$ يكون مركز الحزمة $A_o(-1,3)$

(2

(a $d // xx'$ يكون أمثال x في المعادلة معدوماً أي $\lambda=-3$ وتكون معادلة d هي $y=3$

(b $d // yy'$ يكون أمثال y في المعادلة معدوماً أي $\lambda=\frac{1}{2}$ وتكون معادلة d هي $x=-1$

(c $O\in d$ يكون الحدّ الثّابت في المعادلة معدوماً أي $\lambda=\frac{6}{5}$ وتكون معادلة d هي $y=-3x$

(e $d\perp\Delta_1$ يكون (ميل d)×(ميل المنصف الأول) يساوي -1 أي $\lambda=4$

وتكون معادلة d هي $x+y-2=0$.

(h بعد النّقطة $Q(2,2)$ عن المستقيم d يساوي $\sqrt{10}$ أي

$$\frac{|(\lambda+3)(2)+(2\lambda-1)(2)-5\lambda+6|}{\sqrt{(\lambda+3)^2+(2\lambda-1)^2}}=\sqrt{10}$$ بالإصلاح نجد $\lambda=0$

فتكون معادلة d هي $3x-y+6=0$

مسألة ②:

لتكن المعادلة $(\lambda-1)x+2(1-\lambda)y+3-\lambda=0 : \lambda\in\mathbb{R}$

1) عين مجموعة قيم الوسيط λ الّتي من أجلها تمثّل هذه المعادلة مجموعة مستقيمات (D)

وهل يوجد مستقيم من المجموعة (D) يوازي أحد المحورين الإحداثيين

2) برهن أنّ (D) هي حزمة متوازية وعين m_1 الميّل المشترك للمستقيمات (D) بدلالة λ .

3) عين $\lambda\in\mathbb{R}$ ليكون المستقيم d_1 الذّي معادلته $x-2y+3=0$ عنصراً من (D)

4) اكتب معادلة مستقيمٍ $d_2\in D$ القاطع للمحور $y'y$ في النقطة N التي ترتيبها $y_N=-2$

الحل :

1) المعادلة المفروضة من الشكل : $ax+by+c=0$ حيث

$a=\lambda-1$ ، $b=2(1-\lambda)$ ، $c=3-\lambda$

تمثل هذه المعادلة مجموعة مستقيمات (D) إذا كان $(a,b)\neq(0,0)$

أي $(\lambda-1,2(\lambda-1))\neq(0,0)$ ومنه $\lambda\neq1$ أي $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

إذن من أجل كل $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ تمثّل المعادلة المفروضة حزمة مستقيمات لأنّ وسطاءها a,b,c

تابعة إلى وسيط واحد λ .

إذا كان المستقيم $ax+by+c=0$ يوازي المحور $x'x$ فإن $a=0$, $b\neq0$ من أجل $a=0$ نجد $\lambda=1$

ويكون المستقيم موازياً $x'x$ عندما $b=0$, $a\neq0$ من أجل $a=0$ نجد $\lambda=1$

والحالتين مرفوضتين لأن $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ أي لا يوجد في الحزمة مستقيم يوازي أحد المحورين الإحداثيين

2) إنّ ميل كل مستقيم من مستقيمات الحزمة يساوي $m_1=-\frac{a}{b}=-\frac{\lambda-1}{2(1-\lambda)}=\frac{1}{2}$ و $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

بما أنّ $m_1=\frac{1}{2}$ ثابت فالحزمة (D) هي حزمة مستقيمات متوازية

والميل المشترك لمستقيمات الحزمة يساوي $\frac{1}{2}$.

3) إنّ ميل المستقيم d_1 يساوي $\frac{1}{2}$ فهو أحد مستقيمات الحزمة ويمر بالنقطة $M(-3,0)$

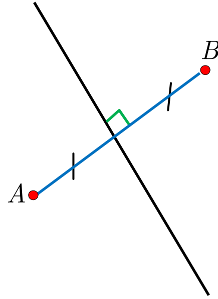
نعوض إحداثيات M في معادلة الحزمة

نجد $(\lambda-1)(-3)+2(1-\lambda)(0)+3-\lambda=0$ بالإصلاح نجد $\lambda=\frac{3}{2}$

4) ميل المستقيم d_2 يساوي $\frac{1}{2}$ ويقطع المحور $y'y$ في النقطة $y_N=-2$ أي أنّه يمرّ من النّقطة $N(0,-2)$ فتكون معادلته $y+2=\frac{1}{2}(x-0)$ أو $x-2y-4=0$

أمثلة : على مجموعة نقط هي نقاط لمستقيم

1 محور قطعة مستقيمة :



هو المستقيم العمود على القطعة المستقيمة في منتصفها

من أهم خواصه أن كل نقطة من نقاط محور القطعة

المستقيمة تكون متساوية البعد عن طرفي القطعة المستقيمة

مثال : أوجد معادلة محور القطعة المستقيمة $[AB]$	إذا كانت	$A(2,-1)\ ,\ B(-6,5)$

الحل إذا فرضنا $M(x,y)$ نقطة من محور القطعة المستقيمة $[AB]$

فإن $AM = BM$ ومنه $\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x+6)^2+(y-5)^2}$

بالتربيع $x^2-4x+4+y^2+2y+1 = x^2+12x+36+y^2-10y+25$

بالإصلاح نجد معادلة محور القطعة المستقيمة $[AB]$ هي $4x-3y+14=0$

حل آخر : منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هي $N(-2,2)$ وميل المستقيم (AB)

$m_1 = \dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \dfrac{5+1}{-6-2} = -\dfrac{3}{4}$ فميل محور القطعة المستقيمة $[AB]$

وليكن m_2 فيكون $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$ ومنه $m_2 = \dfrac{4}{3}$

معادلة محور القطعة المستقيمة $[AB]$ هي:

$y - y_N = m_2(x-x_N)$ بالتعويض $y-2 = \dfrac{4}{3}(x+2)$

بالإصلاح نجد $4x-3y+14=0$

2 **المنصّف الدّاخلي للزّاوية:** مجموعة نقط المستوي المتساوية المسافة عن ضلعي القطّاع الزّاوي

هما المستقيم المنصّف الدّاخلي و المستقيم المنصّف الخارجي لقطاع زاوي

مثال : أوجد معادلة المنصّف الدّاخلي والمنصّف الخارجي للزّاوية بين المستقيمين

$d_1 : 2x + 4y + 1 = 0$ و $d_2 : 2x - y - 3 = 0$

الحل: إذا فرضنا $M(x,y)$ نقطة من منصف الزّاوية بين المستقيمين d_2 , d_1

فإنّ $\ell(M,d_1) = \ell(M,d_2)$

حسب القانون $\ell(A,\Delta) = \dfrac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\frac{|2x + 4y + 1|}{2\sqrt{5}} = \frac{|2x - y - 3|}{\sqrt{5}}$$

ومنه $|2x + 4y + 1| = 2|2x - y - 3|$

مجموعة النّقط $M(x,y)$ اجتماع المستقيمين

$$\begin{cases} 2x - 6y - 7 = 0 \\ 6x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

3 مجموعة نقط المستوي المتساوية المسافة عن مستقيمين متوازيين

مثال : أوجد معادلة مجموعة النّقط الّتي بعدها عن المستقيم $d_1 : 2x + y + 1 = 0$

يساوي بعدها عن المستقيم $d_2 : 2x + y - 3 = 0$

الحل: إذا فرضنا $M(x,y)$ نقطة متساوية البعد عن المستقيمين d_2 , d_1

فإنّ $\ell(M,d_1) = \ell(M,d_2)$

$$\frac{|2x + y + 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x + y - 3|}{\sqrt{5}}$$

ومنه $2x+y+1=\pm(2x+y-3)$ الموجب مرفوض ينتج عنه معادلة مستحيلة

مجموعة النّقط هي نقاط المستقيم $2x+y+1=-(2x+y-3)$

بالإصلاح $2x+y-1=0$

وهو مستقيم يوازي كل من d_2 , d_1 ويمرّ من منتصف المسافة بينهما

مسائل على المستقيم

مسألة① :

لدينا في مستوٍ κ منسوب لمعلمٍ متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ النقطتان $A(2,0)$ ، $B(-2,4)$

والمستقيمان: $d: x-y+4=0$ ، $\Delta: x+2=0$

أوجد معادلة مجموعة النّقط (المحلّ الهندّسي) للنّقطة M في كلٍ من الحالات الآتية:

1) $AM=BM$ (محور القطعة المستقيمة $[AB]$)

2) بعد M عن المستقيم d يساوي AB

3) بعد M عن المستقيم Δ يساوي بعد M عن النقطة A

4) بعد M عن المستقيم Δ يساوي بعد M عن المستقيم d

الحل : بفرض $M(x,y)$

1) $AM=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$ ، $BM=\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}$

$AM=BM \Leftrightarrow AM^2=BM^2$ أو $(x-2)^2+y^2=(x+2)^2+(y-4)^2$

بالنّشر والإصلاح نجد $x-y=-2$ وهي معادلة المحلّ الهندّسي للنّقطة M

2) $AB=\sqrt{(-2-2)^2+(4-0)^2}=4\sqrt{2}$ ، $\ell_1=\dfrac{|x-y+4|}{\sqrt{2}}$ وحسب الفرض يكون

$\frac{|x-y+4|}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$ إما $x-y+4=8$ أي $x-y=4$ أو $x-y+4=-8$ أي $x-y=-12$

فالمحل الهنّدسي للنّقطة M هو اجتماع المستقيمين

$$d_1 : x-y=4$$
$$d_2 : x-y=-12$$

3) $AM=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$ ، $\ell_2=|x+2|$

حسب الفرض $AM=\ell_2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}=|x+2|$

بتربيع الطّرفين نجد $(x-2)^2+y^2=x^2+4x+4$ بالإصلاح نجد

$y^2=8x$ وهي معادلة المحل الهنّدسي للنقطة M .

4) حسب الفرض يكون $\frac{|x-y+4|}{\sqrt{2}}=|x+2|$ أو $|x-y+4|=\sqrt{2}|x+2|$

إمّا $x-y+4=\sqrt{2}x+2\sqrt{2}$ ومنه $\left(1-\sqrt{2}\right)x-y=2\sqrt{2}-4$ معادلة d_3

وإمّا $x-y+4=-\sqrt{2}x-2\sqrt{2}$ ومنه $\left(1+\sqrt{2}\right)x-y=-2\sqrt{2}-4$ معادلة d_4

إذن المحلّ الهنّدسي للنّقطة M هو اجتماع المستقيمين d_3 و d_4 .

مسألة②: في مستوٍ منسوب لمعلمٍ متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ لدينا المستقيمان

Δ_1 الذي معادلته : $3x-2y+1=0$ و Δ_2 الذي معادلته $4y-6x+9=0$

1) أوجد معادلة المحلّ الهنّدسي للنّقطة M التي بعدها عن المستقيم Δ_1 يساوي بعدها عن المستقيم Δ_2 .

2) احسب البعد بين المستقيمين Δ_1 ، Δ_2 .

الحل : 1) بفرض $M(x,y)$ حسب الفرض يكون $\frac{|4y-6x+9|}{\sqrt{36+16}}=\frac{|3x-2y+1|}{\sqrt{9+4}}$

أو $\frac{|3x-2y+1|}{1}=\frac{|4y-6x+9|}{2}$

إمّا $2(3x-2y+1)=4y-6x+9$ ومنه $12x-8y-7=0$ وهي معادلة المحلّ الهنّدسي

وإمّا $2(3x-2y+1)=-(4y-6x+9)$ وهي مستحيلة .

2) لاحظ أن المستقيمين متوازيين (لهما نفس الميل $m=3$) فيكون البعد بينهما يساوي بعد نقطة من أحدهما عن المستقيم الآخر . النقطة $A(-1,-1)\in\Delta_1$ إذن :

$$\ell=\frac{|4(-1)-6(-1)+9|}{\sqrt{52}}=\frac{11}{2\sqrt{13}}$$

مسألة③: ليكن d مستقيماً معادلته : $4x+3y-11=0$

ولتكن $N(-2,3)$ ، $M(1,\lambda)$ نقطتين من المستوي P (λ وسيط حقيقي)

1) برهن أن النّقطة المتحولة M ترسم مستقيماً (عندما تتحول λ على $\mathbb{R}$)

يطلب إيجاد معادلة هذا المستقيم

2) عين النقطة M ليكون $(NM)//d$

3) عين النقطة M ليكون $(NM)\perp d$

4) اكتب معادلة المستقيم d_1 المار بالنّقطة N والموازي للمستقيم d

الحل :

1) بما أنّ $M(1,\lambda)$ يكون $x=1$ و $y=\lambda$ فالمحل الهندسي للنّقطة M هو المستقيم الذي معادلته $x=1$.

2) يكون $(NM)//d$ إذا كان ميل d يساوي ميل (NM) أي $\frac{\lambda-3}{1+2}=-\frac{4}{3}\Rightarrow\lambda=-1$

3) يكون $(NM)\perp d$ إذا كان $m_{(NM)}\times m_d=-1$ أي

$$\frac{\lambda-3}{1+2}\times\left(-\frac{4}{3}\right)=-1\Rightarrow\lambda=\frac{21}{4}$$

4) معادلة d_1 من الشكل : $(y-3)=-\frac{4}{3}(x+2)$ أو $3y+4x-1=0$.

مسألة④: لتكن المستقيمات $d_1:2x-y+5=0$ و $d_2:4x-2y-3=0$ و $d_3:x-2y-5=0$

أوجد معادلة المحلّ الهندسي للنّقطة $M(x,y)$ في كلٍ من الحالات الآتية

1) بعد النّقطة M عن المستقيم d_1 يساوي $2\sqrt{5}$

2) بعد النّقطة M عن المستقيم d_1 يساوي بعدها عن المستقيم d_2

3) بعد النّقطة M عن المستقيم d_1 يساوي بعدها عن المستقيم d_3

4) بعد النّقطة M عن النقطة $A(3,-1)$ يساوي 3

الحل :

1) حسب الفرض يكون $\frac{|2x-y+5|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$ تكافئ $|2x-y+5|=10$

إمّا $2x-y-5=0$ وهي معادلة مستقيم Δ_1

وإمّا $2x-y+15=0$ وهي معادلة مستقيم Δ_2 فالمحلّ الهندّسي للنّقطة M هو $\Delta_1\cup\Delta_2$

2) حسب الفرض يكون $\frac{|2x-y+5|}{\sqrt{5}}=\frac{|4x-2y-3|}{2\sqrt{5}}$

تكافئ $2|2x-y+5|=|4x-2y-3|$

بالإصلاح نجد $8x-4y+7=0$ وهي معادلة المحل الهندسي للنقطة M .

3) حسب الفرض يكون $\frac{|2x-y+5|}{\sqrt{5}}=\frac{|x-2y-5|}{\sqrt{5}}$

بالإصلاح نجد إما $x+y+10=0$ وهي معادلة مستقيم Δ_3

وإمّا $x-y=0$ وهي معادلة مستقيم Δ_4 فالمحلّ الهندّسي للنّقطة M هو $\Delta_3 \cup \Delta_4$

4) حسب الفرض لدينا $AM=3 \Rightarrow AM^2=9$ ومنه

$(x-3)^2+(y+1)^2=9$ وهي معادلة المحل الهندسي للنقطة M .

مسألة⑤: لتكن النّقطة $N(3,1)$ نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC حيث

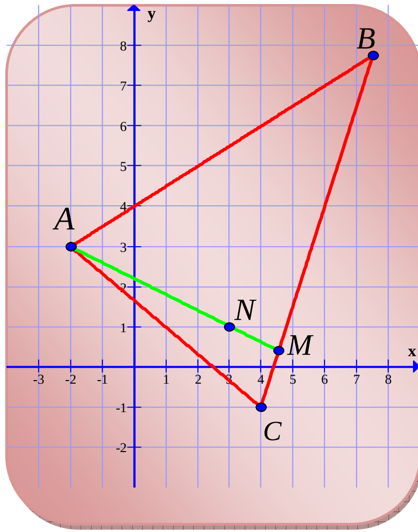
$A(-2,3)$ ، $B(4,-1)$ أوجد إحداثيات النّقطة (C) واحسب مساحة المثلّث ABC

الحل :

نفرض $C(x,y)$

إن (AN) عمودي على (CB) وميل (AN) يساوي $m=\frac{1-3}{3+2}=-\frac{2}{5}$ فيكون ميل (CA) يساوي

$m'=\frac{5}{2}$ فتكون معادلة (CB) هي $y+1=\frac{5}{2}(x-4)$ أو $(1)....y=\frac{5}{2}x-11$



إن (BN) عمودي على (CA)

وميل (BN) يساوي $m=\frac{-1-1}{4-3}=-2$

فيكون ميل (CA) يساوي $m'=\frac{1}{2}$

معادلة (CA) هي $y-3=\frac{1}{2}(x+2)$

أو $(2).....y=\frac{1}{2}x+4$

بحل جملة المعادلتين (1) و (2) نجد $x=\frac{15}{2}$ ، $y=\frac{31}{4}$ إذن $C\left(\frac{15}{2},\frac{31}{4}\right)$

ارتفاع المثلّث ABC المرسوم من A يساوي بعد النّقطة A عن المستقيم (CB) معادلته

$5x-2y-22=0$

$$CB=\sqrt{\left(\frac{15}{2}-4\right)^2+\left(\frac{31}{4}+1\right)^2}=\sqrt{\frac{49}{4}+\frac{1225}{16}}=\frac{\sqrt{1421}}{4}=\frac{7\sqrt{29}}{4} \quad ، \quad AM=\frac{|-10-6-22|}{\sqrt{25+4}}=\frac{38}{\sqrt{29}}$$

ومنه مساحة المثلّث ABC تساوي $S=\frac{1}{2}\frac{7\sqrt{29}}{4}\frac{38}{\sqrt{29}}=\frac{133}{4}$

مسألة⑥: في مستوٍ محدث، ليكن المستقيم d_1 الذي معادلته $2x+y-8=0$ ، وليكن المستقيم d_2 الذيّ معادلته $x-2y=0$ ، ولتكن النقطتان $A(3,-2)$ ، $B(1,2)$

أوجد المحلّ الهندّسي للنقطة $M(x,y)$ في كلٍ من الحالات الآتية:

1) بعد M عن النّقطة A يساوي بعد M عن النّقطة B

2) بعد M عن المستقيم d_1 يساوي AB

3) بعد M عن المستقيم d_1 يساوي بعد M عن المستقيم (AB)

4) بعد M عن المستقيم d_1 يساوي بعد M عن المستقيم d_2

الحل :

(1 $$MA=MB \Leftrightarrow MA^2=MB^2$$

$(x-3)^2+(y+2)^2=(x-1)^2+(y-2)^2$ بالإصلاح نجد $x-2y-2=0$

فالمحلّ الهندّسي للنّقطة M هو المستقيم d' الذي معادلته $x-2y-2=0$

2) بعد M عن المستقيم d_1 يساوي AB يكافئ :

$$\frac{|2x+y-8|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{(3-1)^2+(-2-2)^2} \Leftrightarrow |2x+y-8|=10$$

إمّا $2x+y-18=0$ وهي معادلة المستقيم d_1'

وإمّا $2x+y+2=0$ وهي معادلة المستقيم d_2'

فالمحلّ الهندّسي للنّقطة M هو $d_1' \cup d_2'$

3) بعد M عن المستقيم d_1 يساوي بعد M عن المستقيم (AB) يكافئ :

$$\frac{|2x+y-8|}{\sqrt{5}}=\frac{|2x+y-4|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |2x+y-8|=|2x+y-4|$$

تكافئ $2x+y-6=0$ وهي معادلة فالمحلّ الهندّسي للنّقطة M

4) بعد M عن المستقيم d_1 يساوي بعد M عن المستقيم d_2 تكافئ

$$\frac{|2x+y-8|}{\sqrt{5}}=\frac{|x-2y|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |2x+y-8|=|x-2y|$$

إمّا $2x+y-8=x-2y \Leftrightarrow x+3y-8=0$ وهي معادلة المستقيم Δ_1

وإمّا $2x+y-8=-x+2y \Leftrightarrow 3x-y-8=0$ وهي معادلة المستقيم Δ_2

فالمحلّ الهندّسي للنّقطة M هو $\Delta_1 \cup \Delta_2$

نصف المستوي

1 نصف المستوي:

معادلة المستقيم $ax+by+c=0$ تقسم المستوي إلى نصفين

نقاط النصف الأول تحقق $ax+by+c<0$ و نقاط النصف الثاني تحقق $ax+by+c>0$

والمستقيم $ax+by+c=0$ يفصل بينهما

ويمكن معرفة نقاط نصف المستوي المطلوب برسم المستقيم $ax+by+c=0$ ثم تعويض نقطة من نقاط نصف المستوي لا تنتمي للمستقيم فإن تحققت المتراجحة يكون نصف المستوي الذي يحتوي هذه النقطة هو نصف المستوي المطلوب وإن لم تتحقق المتراجحة فنصف المستوي الآخر الذي لا يحتوي هذه النقطة هو النصف المطلوب

ملاحظة : غالباً نختار النّقطة $O(0,0)$ إن لم يمرّ المستقيم منها

(نختار هذه النقطة لسهولة التعويض والوصول للنتيجة بشكل أسرع)

لبيان نصف المستوي حل المتراجحة نظلل(نشطب) النصف الذي لا يحقق المتراجحة الجزء الذي لم يشطب من المستوي هو الحل (نصف المستوي المعين بالمتراجحة)

مثال 1 : أوجد نصف المستوي المعين بالمتراجحة $2x-3y+6<0$

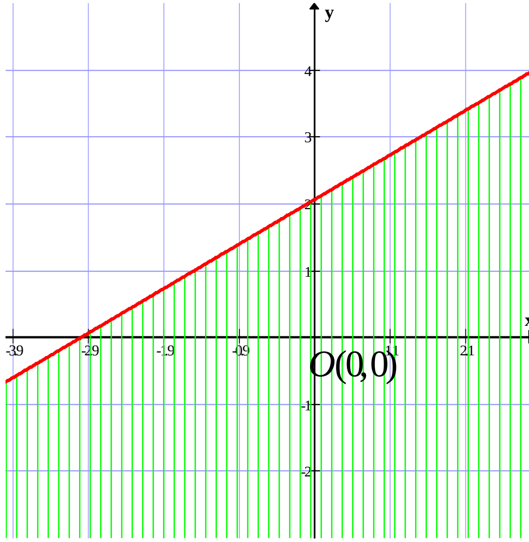
مع تظليل (شطب) القسم الذي لا يحقق المتراجحة

الحل : نرسم المستقيم $2x-3y+6=0$ بمعرفة نقطتين منه

حسب الجدول

x	0	-3
y	2	0

إذا عوضنا النقطة $O(0,0)$ في المتراجحة $2x-3y+6<0$ نجدها غير محققة



فالنقطة $O(0,0)$ تقع في نصف المستوي

الذي لا يحقق المتراجحة فالنصف الذي

لا تقع فيه $O(0,0)$ هو مجموعة حلول المتراجحة

وهو جزء المستوي الواقع تماماً فوق نقاط المستقيم

لاحظ نقاط المستقيم ليست من مجموعة الحلول

مثال 2 : أوجد حل جملة المتراجحتين مع تظليل (شطب) القسم الذي لا يحقق المتراجحة

$$\begin{cases} 4x-3y+12<0 \ldots\ldots ① \\ 3x+2y-6\geq 0 \ldots\ldots ② \end{cases}$$

الحل : لحل المتراجحة $4x-3y+12<0 \ldots\ldots ①$ نرسم المستقيم $4x-3y+12=0$

بمعرفة نقطتين منه حسب الجدول

x	0	-3
y	4	0

إذا عوضنا النقطة $O(0,0)$ في المتراجحة ① نجدها غير محققة فالنقطة $O(0,0)$

تقع في نصف المستوي الذي لا يحقق المتراجحة فالنّصف الذي لا تقع فيه $O(0,0)$

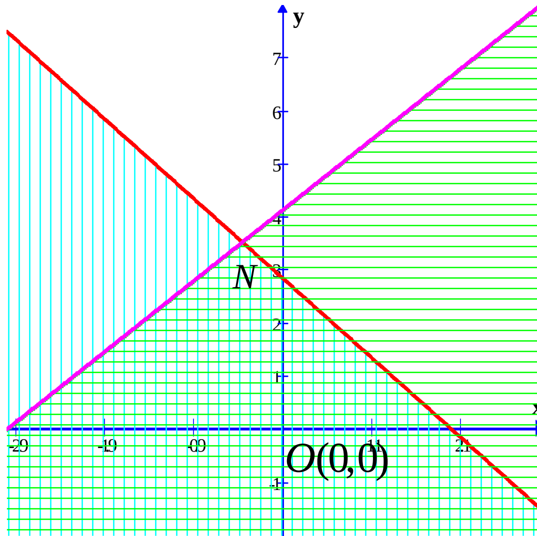
هو مجموعة حلول المتراجحة وهو جزء المستوي الواقع تماماً فوق نقاط المستقيم

لاحظ نقاط المستقيم ليست من مجموعة الحلول

لحل المتراجحة ②........$3x+2y-6\geq 0$ نرسم المستقيم $3x+2y-6=0$

بمعرفة نقطتين منه حسب الجدول

x	0	2
y	3	0



إذا عوضنا النقطة $O(0,0)$ في المتراجحة②

نجدها غير محققة فالنقطة $O(0,0)$ تقع

في نصف المستوي الذي لا يحقق المتراجحة

فالنّصف الذي لا تقع فيه $O(0,0)$

هو مجموعة حلول المتراجحة وهو جزء المستوي

الواقع فوق المستقيم بما فيها نقط المستقيم لاحظ نقاط المستقيم ليست من مجموعة الحلول

مجموعة حلول المتراجحتين هي المنطقة من المستوي غير المظلّلة بما فيها نصف المستقيم

$3x+2y-6=0$ والذي يحد هذه المنطقة

مثال 3 : بين أن مجموعة حلول جملة المتراجحات

$$\begin{cases} x-3y+3\geq 0......① \\ 4x+y-6\leq 0.......② \\ x+y\geq 0........③ \end{cases}$$

مع تظليل (شطب) القسم الذي لا يحقق المتراجحة هو مثلث ABC وأوجد مساحته

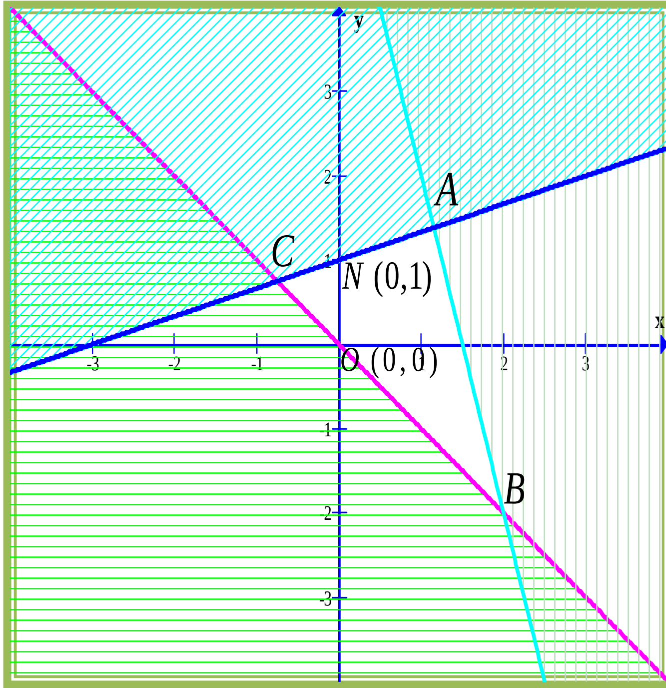
حيث $\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=1cm$ وهل تنتمي النقطة $M(-\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ تنتمي لنقاط داخل المثلث

وكذلك هل تنتمي النقطة $H(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ لنقاط داخل المثلث

الحل: نرسم المستقيمات

$x-3y+3=0$		
x	0	-3
y	1	0

$4x+y-6=0$		
x	0	$\frac{3}{2}$
y	6	0



$x+y=0$		
x	0	1
y	0	-1

$O(0,0)$ تحقق المتراجحة ②

و تحقق المتراجحة ①

$N(0,1)$ تحقق المتراجحة ③

مجموعة حلول المتراجحات هي سطح المثلث ABC ومحيطه

بحل جملة المعادلتين $\begin{cases} x-3y+3=0 .....❶ \\ 4x+y-6=0 .....❷ \end{cases}$ من ❶: $x=3y-3$ نبدل في ❷ نجد

$4(3y-3)+y-6=0$ ومنه $y=\frac{18}{13}$ نبدل في ❶ نجد $x=\frac{15}{13}$ فالنقطة $A(\frac{15}{13},\frac{18}{13})$

بحل جملة المعادلتين $\begin{cases} x-3y+3=0 .....❶ \\ x+y=0 ....❸ \end{cases}$

بطرح المعادلتين نجد $-4y+3=0$ ومنه $y=\frac{3}{4}$ نبدل في ❸ نجد $x=-\frac{3}{4}$ فالنقطة $C(-\frac{3}{4},\frac{3}{4})$

بحل جملة المعادلتين $\begin{cases} 4x+y-6=0.....❷ \\ x+y=0...........❸ \end{cases}$

بطرح المعادلتين نجد $3x-6=0$ ومنه $x=2$ نبدل في ❸ نجد $y=-2$ فالنقطة $B(2,-2)$

لنحسب طول BC نجد $BC=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}$ ومنه $BC=\sqrt{\frac{121}{16}+\frac{121}{16}}=\frac{11}{4}\sqrt{2}$

لنحسب بعد A عن المستقيم $(BC):x+y=0$ وهو ارتفاع المثلث $h_A=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

مساحة المثلث ABC : $S=\frac{1}{2}BC\cdot h_A$ ومنه $S=\frac{1}{2}\frac{11}{4}\sqrt{2}\cdot\frac{33}{13\sqrt{2}}=\frac{343}{26}\ \overline{cm}^2$

إذا عوضنا النّقطة $M(-\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ في المتراجحة $x-3y+3\geq 0......①$ نجد $-\frac{1}{2}-\frac{9}{4}+3=\frac{1}{12}\geq 0$ محققة

إذا عوضنا النّقطة $M(-\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ في المتراجحة $2x+y-6\leq 0.....②$ نجد $-2-\frac{3}{4}-6=-\frac{35}{4}\leq 0$ محققة

إذا عوضنا النّقطة $M(-\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ في المتراجحة $x+y\geq 0........③$ نجد $-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\geq 0$ محققة

فالنّقطة $M(-\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ تنتمي لنقاط داخل المثلث

إذا عوضنا النّقطة $H(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ في المتراجحة $4x+y-6\leq 0.....②$

نجد $6+\frac{1}{2}-6=\frac{1}{2}>0$ غير محققة

فالنّقطة $H(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ لا تنتمي لنقاط داخل المثلث

❷ استخدام معادلة المستقيم في موضوع البرمجة الخطية:

التفكير بزياد أرباح شركة وتحسين الأداء والإنتاج مشاكل تواجه إدارة المشاريع وتبدأ دراسة هذه المشاكل ومن هذه المشاكل :رأس المال ، القوّة العاملة، المواد الأوّلية، الآلات ،المكان، الوقت

لزيادة مقياس الأداء والأرباح والإقلال من التّكلفة نستخدم البرمجة الرّياضية وقد نستخدم الدوال الخطيّة التي تتضمن التّغيرات الأساسية للتّعبير عن التّكلفة أو الأداء والتّي يمكن التّحكم بها كالرّبح والتّكلفة ويُعبّر عن الموارد المتاحة بمتراجحات خطيّة وهذه العمليّة تسمى البرمجة الخطيّة

مشاكل الأمثليّة

مشاكل الأمثليّة هي تلك المشاكل التي نبحث فيها عن أكبر أو أصغر قيمة لدالّة تعتمد على متغير أو متغيرات وتسمى هذه الدّالة بدالة الهدف وتخضع هذه الدّالة إلى قيود متمثلة في معادلات أو متباينات(متراجحات) تربط وتحكم المتغيرات مع بعضها

يساعد في مشاكل الأمثلية الحل بالطّريقة البيانية: (**اخترنا هذا الموضوع لترابطه مع معادلة المستقيم**)

يمكن حل مسألة البرمجة الخطيّة بيانيا (بالرّسم البياني) إذا كانت المسألة لها متغيران فقط أي

(x, y) **وهما متغيرا القرار وذلك لتعذّر رسم المتباينات لأكثر من ذلك ، و يمكن حل المسألة كالتالي**

أولاً : رسم المتباينات و إيجاد منطقة الحلول الممكنة

وهي (المنطقة التي تحقق فيها متغيرات القرار جميع القيود في آن واحد) .

ثانياً : تحديد نقاط الأركان لمنطقة الحلول الممكنة (إيجاد إحداثيات هذه النّقاط).

ثالثاً : التّعويض بنقاط الأركان في دالة الهدف واختيار النّقطة التيّ تعطي الحلّ الأمثل

وهو(أكبر قيمة لدالة الهدف أو أصغر قيمة حسب دالة الهدف) .

مثال:

ينتج أحد معامل السّكر نوعين من السّكر النوع الأوّل نقي للاستهلاك المنزلي ونوع أخر عادي لصناعة الحلوى يحتاج النّوع الأوّل 10 كيلو غرام من الشّمندر السّكري لصناعة كيلو غرام من السّكر و 0.4 ساعة عمل و ويحتاج النّوع العادي إلى 8 كيلو غرام من الشّمندر السّكري لصناعة كيلو غرام من السّكر و 0.2 ساعة عمل يربح المصنّع 7 ليرة سورية لكل كيلوغرام من النّوع الأوّل و يربح المصنّع 6 ليرة سورية لكل كيلوغرام من النّوع العادي ترغب إدارة المصنّع في تحديد كمية السّكر من كل نوع بحيث تكون أرباح المصنّع أكبر ما يمكن علماً بأنّه يرد للمصنع يومياً 5200كيلوغرام من الشّمندر السّكري و 160ساعةعمل

الحل: بفرض يتم تصنيع x كيلو غرام كمية السّكر من النّوع الأوّل

و يتم تصنيع y كيلو غرام كمية السكر من النّوع الثّاني يكون $x \geq 0$ و $y \geq 0$

كمية الشّمندر التيّ يصنعها يوميّاً $10x + 8y$ و(هذه الكمية ≤ 5200 كيلو غرام)

أي $10x + 8y \leq 5200$ أو $5x + 4y \leq 2600$

وساعات العمل $0.4x + 0.2y \leq 160$

أو $2x + y \leq 800$

الرّبح (دالة الهدف) $\lambda = 7x + 6y$

لنوجد الحلّ المشترك للمتراجحات



$$\begin{cases} x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0 \\ 5x + 4y \leq 2600 \\ 2x + y \leq 800 \end{cases}$$

الحلّ الأمثل : $x = 200 \quad , \quad y = 400$

مثال:

يقوم مصنّع بصناعة أغطية وزن الواحد منها 4 كيلو غرام ومن لونين من الخيوط اللّون الأوّل يحتوي على 20% قطن ويكلّف 240 ليرة لكل كيلو ويحتوي اللّون الثّاني على 40% قطن ويكلف 180 ليرة لكل كيلو غرام ما هي كمية الخيوط التيّ يجب أن تستخدم من كل نوع إذا علمت أنه يجب تخفيض التّكاليف والمحافظة على نسبة القطن في الغطاء المصنوع بحيث لا يزيد عن 30%

الحل نفرض كمية النّوع الأوّل x كيلو غرام و كمية النّوع الثّاني y كيلو غرام

دالّة الهدف أصغر z حيث $z = 240x + 180y$ أو (نكتب دالّة الهدف $M\ in(z) = 240x + 180y$

القيود في المسألة : القطن لا يزيد عن 25% أي : $0.20x + 0.40y \le 0.30$ أو $2x + 4y \le 3$

مجموع كمية النوعين كيلو غرام واحد $x + y = 4$

كل من كميتي الخيوط $x \ge 0$, $y \ge 0$

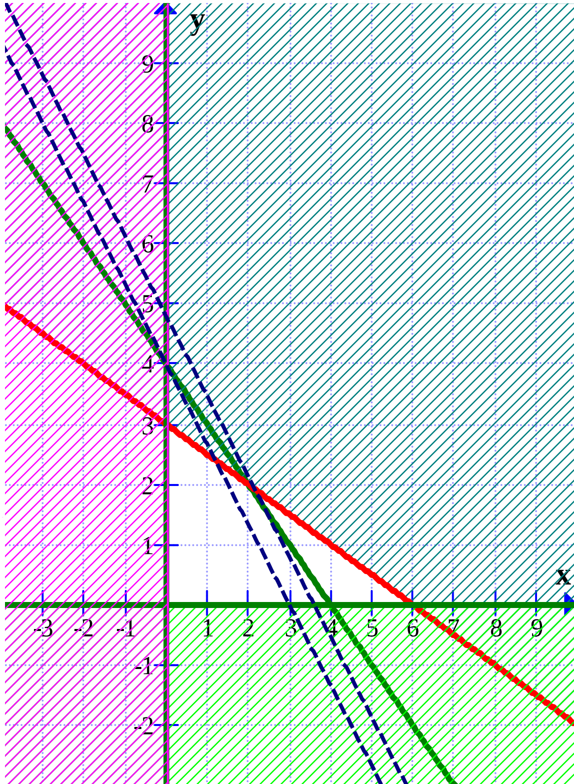
نقطة تقاطع $x + y = 4$ و $2x + 4y = 3$ هي $(\frac{11}{6},\frac{13}{6})$

نستخدم من النوع الأول $x = \frac{11}{6}\times 4 = \frac{22}{3}$ كيلو غرام

نستخدم من النوع الأول $x = \frac{11}{6}\times 4 = \frac{22}{3}$ كيلو غرام

نستخدم من النوع الأول $y = \frac{13}{6}\times 4 = \frac{26}{3}$ كيلو غرام

ويكون $M\ in(z) = 240\left(\frac{11}{6}\right) + 180\left(\frac{13}{6}\right) = 830$



الأستاذ أحمد أبو نبوت

التحويلات النقطية الشهيرة

نعتبر المستوي منسوب لمعلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ونعتبر $M(x,y)$ و $M'(x',y')$ نقطتين من المستوي

نرمز لمجموعة نقط المستوي $\mathbb{R}^2=\{(x,y):x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\}$

تعريف: التحويل النقطي هو كل دالّة من نقط المستوي نحو نقط المستوي

وبالرّموز هو دالّة: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x,y)=(x',y')$

النّقطة الصّامدة :

نقول عن النّقطة M إنّها نقطة صامدة وفق التّحويل النّقطي f إذا وفقط إذا كان $f(M)=M$

مثال : ليكن المستقيم $\Delta:3x+2y-6=0$ أوجد صورته وفق التّحويل النّقطي

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$
$$f(x,y)=(x-y,2x+y-2)$$

وهل يوجد نقط من نقاط المستقيم Δ صامدة وفق هذا التحويل ؟

الحل:

$$f(x,y)=(x-y,2x+y-2)=(x',y')$$
$$x-y=x' \quad ....①$$
$$2x+y-2=y'....②$$

بجمع ① و ② نجد $3x-2=x'+y'$ ومنه $x=\dfrac{x'+y'+2}{3}$

نعوض في ① نجد $\dfrac{x'+y'+2}{3}-y=x'$ ومنه $y=\dfrac{y'-2x'+2}{3}$

نعوض x,y في معادلة المستقيم نجد $\Delta':3\dfrac{x'+y'+2}{3}+2\dfrac{y'-2x'+2}{3}-6=0$

بالإصلاح $\Delta' : x' - 5y' + 8 = 0$ بالعودة للتّرميز المألوف (رمز النّقطة المتغيّرة في المستوي (x, y))

نحذف $(')$ نجد $\Delta' : x - 5y + 8 = 0$ ، Δ' هو صورة Δ بالتّحويل المفروض

النُّقط الصَّامدة تحقق: $f(x, y) = (x, y)$

$$(x - y, 2x + y - 2) = (x, y)$$
$$x - y = x \quad ....❶$$
$$2x + y - 2 = y ....❷$$

بالحل المشترك للمعادلتين ❶ و ❷ نجد النّقطة $(1,0)$ وهي النقطة الصامدة الوحيدة بالتحويل المفروض لكنها لا تحقق معادلة Δ أي لا يوجد من نقاط Δ أي نقطة صامدة

التّحويل الهندسي :

نسمي التّحويل النّقطي تحويل هندسي عندما يكون هذا التّحويل دالّة تقابل

وكمثال لذلك المثال السابق لأننا وجدنا للمعادلة $f(x, y) = (x', y')$ حل وحيد

من أشهر التّحويلات الهندسيّة :

التّناظر (الانعكاس) ، الانسحاب ، الدّوران ، التّحاكي (التّشابه)

أولاً: التّناظر (الانعكاس):

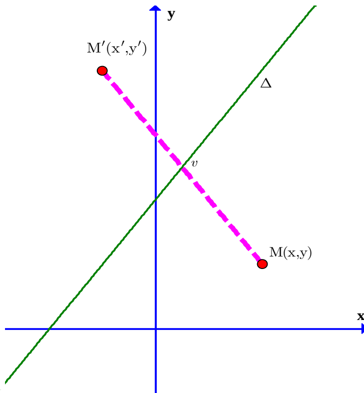
① التّناظر: بالنّسبة لمستقيم :

تعريف: نقول إنّ النّقطتين M' و M متناظرتان بالنّسبة إلى المستقيم Δ

إذا وفقط إذا كان المستقيم Δ محور للقطعة المستقيمة $[MM']$

(محور قطعة مستقيمة هي مجموعة النّقاط المتساوية المسافة

عن طرفي القطعة المستقيمة)



ملاحظة :

نقاط محور التّناظر Δ نقط صامدة وفق تحويل التّناظر بالنّسبة إلى Δ

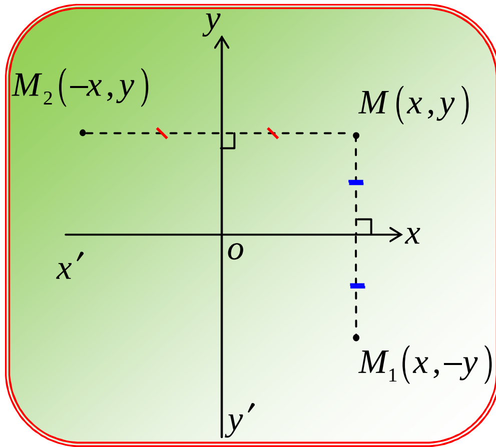
لأنّ كل نقطة من هذا المستقيم نظيرة نفسها بالنّسبة لهذا المستقيم

ملاحظ : كي نوجد معادلة المنحنى النّظير بالنّسبة لمستقيم Δ

نبدل إحداثيات النّقطة النّظيرة في معادلة المنحنى المفروض لأنه إذا كانت M' نظيرة M

بالنسبة إلى المستقيم Δ فإنّ M نظيرة M' بالنّسبة إلى المستقيم Δ

الحالات الخاصّة:



نفرض النّقطة $M(x,y)$ ترسم المنحنى Ω لندرس الحالات:

1. التّناظر بالنّسبة إلى أحد المحورين الإحداثيين:

❶ النّقطة $M_1(x,-y)$ نظيرة النّقطة $M(x,y)$ بالنسبة إلى $x'x$

إذا كانت كل نقطة $M_1(x,-y)$ تحقق معادلة Ω

فإنّ المنحنى Ω متناظر بالنّسبة إلى المحور $x'x$

مثال : أثبت أنّ الخطّ المنحنى الّذي معادلته

$\Omega: x^2+2y^2-4x=2$ متناظر بالنّسبة إلى المحور $x'x$

الحل : نبدل $M_1(x,-y)$ في معادلة المنحنى Ω نجد

$x^2+2(-y)^2-4x=2$ بالإصلاح نجد $\Omega: x^2+2y^2-4x=2$ وهي معادلة المنحنى المفروض

إذاً Ω متناظر بالنّسبة إلى المحور $x'x$

❷ النّقطة $M_2(-x,y)$ نظيرة النّقطة $M(x,y)$ بالنسبة إلى $y'y$

إذا كانت كل نقطة $M_2(-x,y)$ تحقق معادلة Ω فإنّ المنحني Ω

متناظر بالنّسبة إلى المحور $y\acute{y}$

مثال : أثبت أن الخطّ المنحني الّذي معادلته $\Omega: x^2+2y^2-5y=2$

متناظر بالنّسبة إلى المحور $y\acute{y}$

الحل : نبدل $M_2(-x,y)$ في معادلة المنحني Ω نجد: $(-x)^2+2y^2-5y=2$

بالإصلاح نجد $\Omega: x^2+2y^2-5y=2$ وهي معادلة المنحني المفروض

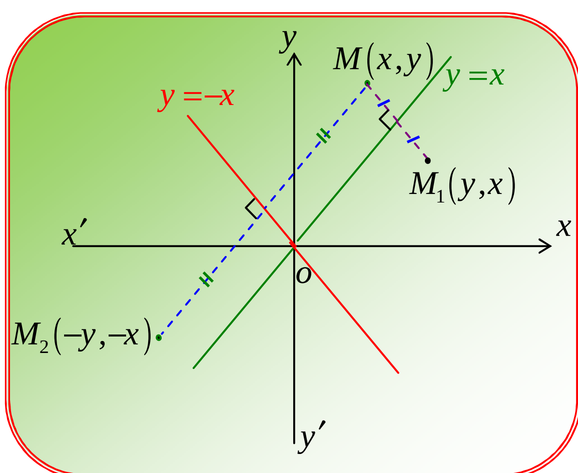
إذاً Ω متناظر بالنّسبة إلى المحور $y\acute{y}$

2. التّناظر بالنّسبة إلى منصف الرّبعين الأوّل والثّالث ومنصف الرّبعين الثّاني والرّابع:

❶ التّناظر بالنّسبة لمنصف الرّبعين الأوّل والثّالث :

مبرهنة: النّقطة $M_1(y,x)$ نظيرة النّقطة $M(x,y)$ بالنسبة إلى $\Delta: y=x$

إذا كان $\Delta: y=x$ فإنّ $g_{y=x}(x,y)=(y,x)$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$



البرهان: بفرض $M_1(x_1,y_1)$ نظيرة $M(x,y)$

بالنّسبة إلى $\Delta: y=x$ فإن :

منتصف $[M_1M]$ وهي $(\frac{x_1+x}{2},\frac{y_1+y}{2})$

تحقق معادلة $\Delta: y=x$

أي $\frac{y_1+y}{2}=\frac{x_1+x}{2}$

ومنه $x_1+x=y_1+y$......①

و (M_1M) عمود على المستقيم $\Delta: y=x$ عندئذ $m_{(M_1M)}\cdot m_\Delta=-1$ لكن $m_\Delta=1$

نستنتج $m_{(M_1M)}=-1$ ومنه $\frac{y_1-y}{x_1-x}=-1$

أو $x_1-x=-y_1+y$......②

بجمع ① و ② نجد $2x_1=2y$ أي $x_1=y$

بطرح ② من ① نجد $2x=2y_1$ ومنه $y_1=x$ إذاً $M_1(y,x)$

ونستنتج : أنّه إذا كانت كل نقطة $M_1(y,x)$ تحقق معادلة Ω فإنّ المنحني Ω

متناظر بالنّسبة إلى Δ المستقيم المنصّف للرّبعين الأوّل والثّالث الّذي معادلته $\Delta: y=x$

> **مثال** : أثبت أنّ الخطّ المنحني Ω الّذي معادلته $\Omega: x^2+y^2-5xy=1$
>
> متناظر بالنّسبة إلى المستقيم $\Delta: y=x$

الحل : نبدّل $M_1(y,x)$ في معادلة المنحني Ω نجد: $y^2+x^2-5yx=1$

وهي المعادلة $\Omega: x^2+y^2-5xy=1$ وهي معادلة المنحني المفروض

إذاً Ω متناظر بالنّسبة إلى المستقيم $\Delta: y=x$

❷ التّناظر بالنّسبة لمنصف الرّبعين الثّاني والرّابع:

مبرهنة: النّقطة $M_2(-y,-x)$ نظيرة النّقطة $M(x,y)$ بالنّسبة إلى $\Delta': y=-x$

إذا كان $\Delta': y=-x$ فإنّ $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $g_{y=-x}(x,y)=(-y,-x)$

البرهان : بفرض $M_2(x_1,y_1)$ نظيرة M (x,y) بالنّسبة إلى $\Delta': y=-x$ فإنّ :

منتصف $[M_1M]$ وهي $(\frac{x_1+x}{2},\frac{y_1+y}{2})$ تحقق معادلة $\Delta': y=-x$

أي $\frac{y_1+y}{2}=-\frac{x_1+x}{2}$ ومنه $y_1+y=-x_1-x$......① و (M_1M) عمود على المستقيم $\Delta': y=-x$

عندئذ $m_{(M_1M)}\cdot m_{\Delta'}=-1$ لكن $m_{\Delta'}=-1$

نستنتج $m_{(M_1M)}=1$ ومنه $\frac{y_1-y}{x_1-x}=1$ أو $x_1-x=y_1-y$.....②

بجمع ① و ② نجد $2x_1=-2y$ أي $x_1=-y$

بطرح ② من ① نجد $2x=-2y_1$ ومنه $y_1=-x$ إذاً $M_2(-y,-x)$

ونستنتج :أنه إذا كانت كل نقطة $M_2(-y,-x)$ تحقق معادلة Ω فإنّ المنحنى Ω

متناظر بالنسبة إلى Δ' المستقيم المنصّف للرّبعين الثّاني والرّابع الّذي معادلته $\Delta': y=x$

مثال : أثبت أن الخطّ المنحنى الّذي معادلته $\Omega: x^2+y^2-5xy=1$

متناظر بالنّسبة إلى المستقيم $\Delta: y=-x$

الحل : نبدّل $M_2(-y,-x)$ في معادلة المنحنى Ω نجد: $(-y)^2+(-x)^2-5(-y)(-x)=1$

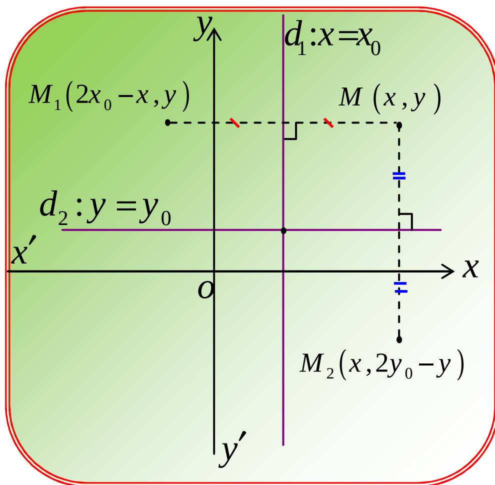
وهي المعادلة $\Omega: x^2+y^2-5xy=1$ وهي معادلة المنحنى المفروض

إذاً Ω متناظر بالنّسبة إلى المستقيم $\Delta: y=-x$

3. التّناظر بالنّسبة إلى مستقيم d_1 يوازي المحور yy' والّذي معادلته $x=x_0$

مبرهنة: إذا كان $x=x_0$ فإنّ $g_{x=x_0}(x,y)=(2x_0-x,y)$ ، $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

البرهان :



بفرض $M_1(x_1,y_1)$ نظيرة $M(x,y)$

بالنّسبة إلى $x=x_0$ فإنّ :

منتصف $[M_1M]$ وهي $(\frac{x_1+x}{2},\frac{y_1+y}{2})$

تحقق معادلة $x=x_0$ أي $\frac{x_1+x}{2}=x_0$

ومنه $x_1=2x_0-x$ و (M_1M) عمود على $x=x_0$ الّذي ميله غير معرف

نستنتج $m_{(M_1M)}=\frac{y_1-y}{x_1-x}=0$ $y_1=y$ إذاً $M_1(2x_0-x,y)$

ونستنتج : إذا كانت كل نقطة $M_1(2x_0-x,y)$ تحقق معادلة Ω فإنّ المنحني Ω

متناظر بالنّسبة إلى المستقيم الموازي $y\acute{y}$ والّذي معادلته $d_1: x=x_0$

مثال : أثبت أن الخطّ المنحني الّذي معادلته $\Omega: x^2+y^2-2x-y=3$

متناظر بالنّسبة إلى المستقيم $\Delta: x=1$

الحل : نبدّل $M_1(2x_0-x,y)$ أي نبدّل $M_1(2-x,y)$ في معادلة المنحني Ω نجد:

$(2-x)^2+y^2-2(2-x)-y=3$ ننشر الأقواس $x^2-4x+4+y^2-4+2x-y=3$

وهي المعادلة $\Omega: x^2+y^2-2x-y=3$ معادلة المنحني المفروض فهو متناظر بالنّسبة

إلى المستقيم $\Delta: x=1$

4. التّناظر بالنّسبة إلى مستقيم d_2 يوازي المحور $x'x$ والّذي معادلته $y=y_0$

مبرهنة: إذا كانت $y=y_0$ فإن $g_{y=y_0}(x,y)=(x,2y_0-y)$, $g:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$

البرهان :

بفرض $M_2(x_2,y_2)$ نظيرة $M(x,y)$ بالنّسبة إلى $y=y_0$ فإن :

منتصف $[M_1M]$ وهي $(\frac{x_2+x}{2},\frac{y_2+y}{2})$ تحقق معادلة $y=y_0$

أي $\frac{y_2+y}{2}=y_0$ ومنه $y_2=2y_0-y$

و (M_2M) عمود على المستقيم $y=y_0$

نستنتج $m_{(M_2M)}=\frac{y_2-y}{x_2-x}$ غير معرف نجد $x_2=x$ إذاً $M_2(x,2y_0-y)$

ونستنتج : إذا كانت كل نقطة $M_2(x,2y_0-y)$ تحقق معادلة Ω فإن المنحني Ω

متناظر بالنّسبة إلى المستقيم الموازي $x'x$ والّذي معادلته $d_2: y=y_0$

مثال : أثبت أن الخطّ المنحني الّذي معادلته $\Omega: x^2+y^2+4y=3$

متناظر بالنّسبة إلى المستقيم $\Delta: y=-2$

الحل : نبدّل $M_2(x,2y_0-y)$ أي نبدّل $M_2(x,-4-y)$ في معادلة المنحني Ω نجد:

$x^2+(-4-y)^2+4(-4-y)=3$ ننشر الأقواس $x^2+16+8y+y^2-16-4y=3$

وهي المعادلة $\Omega: x^2+y^2+4y=3$ معادلة المنحني المفروض

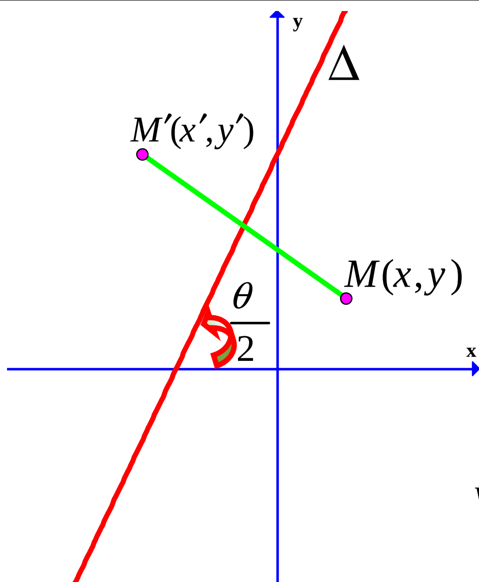
Ω متناظر بالنّسبة إلى المستقيم $\Delta: y=-2$

مبرهنة: ليكن المستقيم $\Delta: y=mx+b$ الّذي يصنع زاوية $\frac{\theta}{2}$ مع المحور $x'x$ (أي $m=\tan\frac{\theta}{2}$)

إذا كانت $M'(x',y')$ نظيرة $M(x,y)$ بالنّسبة للمستقيم Δ فإن :

$$(x',y')=\left(x\cos\theta+y\sin\theta-b\sin\theta,-y\cos\theta+x\sin\theta+b(\cos\theta+1)\right)$$

($m=\tan\frac{\theta}{2}$ يكون: $\sin\theta=\frac{2m}{1+m^2}$, $\cos\theta=\frac{1-m^2}{1+m^2}$ و $k\in\mathbb{Z}$, $\theta\neq\pi+2\pi k$)



البرهان :

إنّ $v\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2}\right)$ منتصف $[MM']$

تنتمي إلى Δ فهي تحقق معادلته أي

$$\frac{y+y'}{2}=m\frac{x+x'}{2}+b.............(1)$$

بما أنّ $[MM']$ عمود على Δ فإنّ $\vec{v}\cdot\overrightarrow{MM'}=0$

وبما أنّ $\vec{v}(1,m)$ و $\overrightarrow{MM'}(x'-x, y'-y)$

فإنّ $x'-x+m(y'-y)=0$ أو $x'=x-m(y'-y)$........(2)

نبدّل (2) في (1) نجد:

$$\frac{y+y'}{2}=m\frac{x+x-m(y'-y)}{2}+b$$
$$y+y'=2mx-m^2y'+m^2y+2b$$
$$\left(1+m^2\right)y'=2mx+\left(m^2-1\right)y+2b$$
$$y'=\frac{\left(m^2-1\right)y+2mx+2b}{1+m^2}$$

نبدّل في (2) نجد:

$$x'=x-m\left(\frac{2mx+\left(m^2-1\right)y+2h}{1+m^2}-y\right)$$
$$x'=\frac{\left(1-m^2\right)x+2my-2mb}{1+m^2}$$

إذن : $(x',y')=\left(\frac{(1-m^2)x-2my-2mb}{1+m^2},\frac{(m^2-1)y-2mx+2b}{1+m^2}\right)$

نكتبها ✪.... $(x',y')=\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}x+\frac{2m}{1+m^2}y-\frac{2m}{1+m^2}b,-\frac{1-m^2}{1+m^2}y+\frac{2m}{1+m^2}x+\frac{2}{1+m^2}b\right)$

بما أنّ $\frac{\theta}{2}$ زاوية المستقيم Δ مع المحور $x'x$ فإنّ $m=\tan\frac{\theta}{2}$, $\theta\neq\pi+2\pi k$: $k\in\mathbb{Z}$

(حسب تعريف ميل المستقيم)

يكون $\frac{2}{1+m^2}=\cos\theta+1$, $\cos\theta=\frac{2m}{1+m^2}$, $\cos\theta=\frac{1-m^2}{1+m^2}$ بالتّعويض في ✪نجد:

$$(x',y')=(x\cos\theta+y\sin\theta-b\sin\theta,-y\cos\theta+x\sin\theta+b(\cos\theta+1))$$

ملاحظة: هذه العلاقة الأخيرة لا تصلح إذا كانت معادلة المستقيم من الشّكل $x = x_0$

وقد لاحظنا قانون التّناظر الموافق لهذه الحالة عند دراسة الحالات الخاصة

نتيجة : إذا كانت $M'(x',y')$ نظيرة $M(x,y)$ بالنسبة إلى $\Delta: y = mx + b \;, m \in \mathbb{R}$ فإنّ

$M(x,y)$ نظيرة $M'(x',y')$ بالنسبة إلى Δ نستنتج من ذلك أنّه لإثبات المنحني Ω متناظر

بالنّسبة إلى $\Delta: y = mx + b \;, m \in \mathbb{R}$ و $\sin\theta = \frac{2m}{1+m^2}$, $\cos\theta = \frac{1-m^2}{1+m^2}$ نبدل

$$(x',y') = (x\cos\theta + y\sin\theta - b\sin\theta, -y\cos\theta + x\sin\theta + b(\cos\theta + 1))$$

إنْ حققت المعادلة كان Ω متناظر بالنّسبة إلى Δ

ملاحظة : إذا كانت $M'(x',y')$ نظيرة $M(x,y)$ بالنّسبة إلى $\Delta: y = mx \;, m \in \mathbb{R}$

فإنّ $(x',y') = (x\cos\theta + y\sin\theta, x\sin\theta - y\cos\theta)$

مثال 1 : أثبت أنّ الخطّ المنحني الّذي معادلته $\Omega: 24x^2 + 21y^2 - 4xy = 500$

متناظر بالنّسبة إلى المستقيم $\Delta: y = 2x$

الحل : $(x',y') = (x\cos\theta + y\sin\theta, x\sin\theta - y\cos\theta)$

ميل المستقيم $m = 2$ يكون $\sin\theta = \frac{2m}{1+m^2} = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{1-m^2}{1+m^2} = -\frac{3}{5}$

ومنه $(x',y') = \left(\frac{1}{5}(4y - 3x), \frac{1}{5}(4x + 3y)\right)$

بالتعويض في معادلة المنحني Ω نجد:

$$\frac{24}{25}(4y - 3x)^2 + \frac{21}{25}(4x + 3y)^2 - \frac{4}{25}(4y - 3x)(4x + 3y) = 500$$

بالإصلاح :

$$384y^2 - 576xy + 216x^2 + 336x^2 + 504xy + 189y^2 - 28xy - 48y^2 + 48x^2 = 12500$$

ومنه $525y^2-100xy+600x^2=12500$ بالتقسيم على 25 نجد $24x^2+21y^2-4xy=500$

وهي معادلة المنحني Ω فيكون المنحني Ω متناظر بالنّسبة إلى المستقيم $\Delta: y=2x$

مثال 2 : أثبت أنّ الخطّ المنحني الّذي معادلته $\Omega: 9x^2+y^2+6xy+50=0$

متناظر بالنّسبة إلى المستقيم $\Delta: y=1-3x$

الحل $(x',y')=(x\cos\theta+y\sin\theta-b\sin\theta, -y\cos\theta+x\sin\theta+b(\cos\theta+1))$

ميل المستقيم $m=-3$ يكون $\cos\theta=\frac{1-m^2}{1+m^2}=-\frac{4}{5}$, $\sin\theta=\frac{2m}{1+m^2}=-\frac{3}{5}$

$$(x',y')=\left(\frac{1}{5}(3-3y-4x),\frac{1}{5}(4y-3x+1)\right)$$

بالتعويض في معادلة المنحني Ω نجد:

$$\frac{9}{25}(3-3y-4x)^2+\frac{1}{25}(4y-3x+1)^2+\frac{6}{25}(3-3y-4x)(4y-3x+1)+50=0$$

$$9\left(9+9y^2+16x^2-18y-24x+24xy\right)$$
$$+(16y^2+9x^2+1-24xy-6x+8y)$$
$$+6(12y-9x+1-12y^2+9xy-3y-16xy+12x^2-4x)+1250=0$$

$$225x^2+25y^2+150xy+1250=0$$

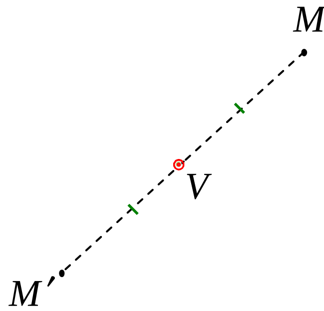
بالتقسيم على 25 نجد $9x^2+y^2+6xy+50=0$

وهي معادلة المنحني Ωفيكون المنحني Ω متناظر بالنسبة إلى المستقيم $\Delta: y=1-3x$

ملاحظة : يمكن تلخيص حالات التّناظر الخّاصة في الجّدول التّالي:

إذا كانت $M'(x',y')$ نظيرة $M(x,y)$ بالنّسبة للمستقيم Δ حيث $g(M)=M'$ فإنّ:

قيمتي m ,b	معادلة Δ	محور التناظر	دالة التناظر $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$
$m=b=0$	$y=0$	هو محور الفواصل $x'x$	$g_{y=0}(x,y)=(x,-y)$
$m=0\ ,\ b=y_0\neq 0$	$y=y_0$	مستقيم يوازي محور الفواصل $x'x$	$g_{y=y_0}(x,y)=(x,2y_0-y)$
$m=1\ ,b=0$	$y=x$	منصف الربعين الأول والثالث	$g_{y=x}(x,y)=(y,x)$
$m=-1\ ,b=0$	$y=-x$	منصف الربعين الثاني والرابع	$g_{y=-x}(x,y)=(-y,-x)$
m ,b غير معرّفتين	$x=x_0$	مستقيم يوازي محور التراتيب $y'y$	$g_{x=x_0}(x,y)=(2x_0-x,y)$
m ,b غير معرّفتين	$x=0$	هو محور التراتيب $y'y$	$g_{x=0}(x,y)=(-x,y)$



②:التّناظر بالنّسبة إلى نقطة(التّناظرالمركزي):

تعريف: إذا كانت النّقطة V منتصف القطعة المستقيمة $[MM']$

نقول إنّ M' و M متناظرتان بالنّسبة إلى النّقطة V

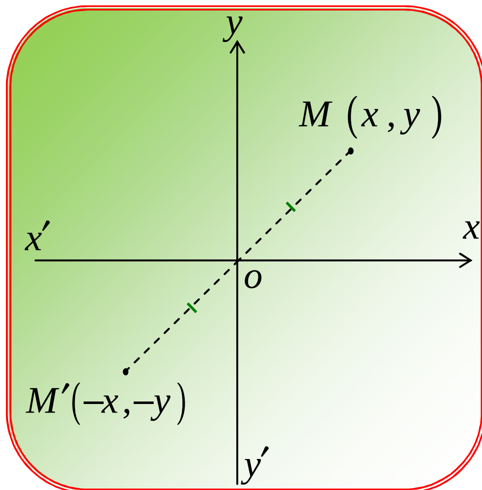
حالة خاصة : التّناظر بالنّسبة إلى $O(0,0)$ مبدأ الإحداثيات

إنّ $M'(-x,-y)$ نظيرة $M(x,y)$ بالنّسبة إلى $O(0,0)$

لأنّ $O(0,0)$ منتصف $[MM']$

إذا كانت كلّ نقطة $M'(-x,-y)$ تحقق معادلة Ω

فإنّ المنحنى Ω متناظر بالنّسبة إلى المبدأ $O(0,0)$



مثال:أثبت أنّ الخط المنحني الّذي معادلته

$\Omega: x^2+y^2+4yx=5$ متناظر بالنّسبة إلى المبدأ $O(0,0)$

الحل : نبدّل $M'(-x,-y)$ في المنحني نجد:

$$(-x)^2+(-y)^2+4(-y)(-x)=5$$

بالإصلاح نجد $x^2+y^2+4yx=5$

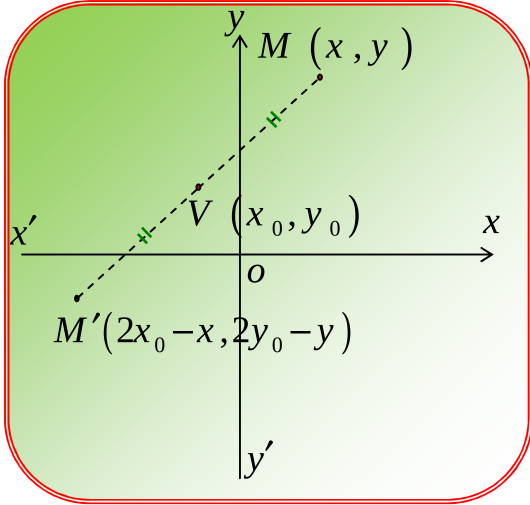
وهي المعادلة $\Omega: x^2+y^2+4yx=5$ معادلة الخط المنحني المفروض

إذاً Ω متناظر بالنّسبة إلى المبدأ $O(0,0)$

مبرهنة : الشّرط اللّازم والكافي كي تكون M'

هي نظيرة M بالنّسبة للنقطة $V(a,b)$

هو : هو أن تكون $M'(2a-x,2b-y)$



لزوم الشّرط : إنّ $V(a,b)$ منتصف $[MM']$

$$a=\frac{x+x'}{2} \quad , \quad b=\frac{y+y'}{2}$$

ومنه $x'=2a-x \quad , \quad y'=2b-y$

إذنْ $M'(2a-x,2b-y)$

كفاية الشّرط : $M'(2a-x,2b-y)$

وتكافئ $x'=2a-v, y'=2b-y$ ومنه $a=\frac{x+x'}{2} \quad , \quad b=\frac{y+y'}{2}$

فتكون $V(a,b)$ منتصف $[MM']$

أي M, M' متناظرتان بالنّسبة إلى $V(a,b)$

التّنيجة إذا كانت كل نقطة $M'(2a-x,2b-y)$ تحقق معادلة الخط المنحني Ω

فإنّ الخط المنحني Ω متناظر بالنّسبة إلى النقطة $V(a,b)$

مثال:أثبت أنّ الخط المنحني الّذي معادلته $\Omega: 4x^2+y^2+8x=0$

متناظر بالنّسبة إلى النقطة $V(-1,0)$

الحل : نبدّل $M'(-2-x,-y)$ في معادلة الخط المنحني نجد:

$$4(-2-x)^2+(-y)^2+8(-2-x)=0$$

بالإصلاح نجد $16+16x+x^2+y^2-16-8x=0$

وهي المعادلة $\Omega: 4x^2+y^2+8x=0$ معادلة الخط المنحني المفروض

Ω متناظر بالنّسبة إلى النقطة $V(-1,0)$

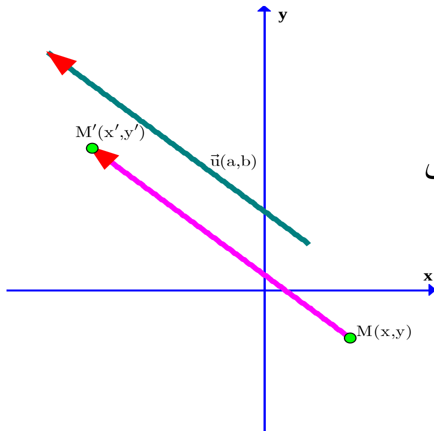
ملاحظة : مركز التّناظر نقطة صامدة

ملاحظة : كي نوجد معادلة الخط المنحني النّظير بالنّسبة لنقطة V

نبدّل إحداثيات النّقطة النّظيرة في معادلة الخط المنحني المفروض لأنّه إذا كانت M' نظيرة M

بالنّسبة إلى نقطة V فإنّ M نظيرة M' بالنّسبة إلى النّقطة V نفسها

ثانياً: الانسحاب



$\vec{u}(a,b)\neq\vec{0}$ متّجه ثابت في المستوي الموجّه بمعلم متجانس

نقول إن M' نقطة من المستوي

صورة M نقطة أخرى من المستوي

بانسحاب متّجهه $\vec{u}(a,b)$ إذا وفقط إذا $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

مبرهنة : الشّرط اللّازم والكافي كي تكون M' صورة M بانسحاب متّجهه $\vec{u}(a,b)$ هو : $x'=x+a \quad , \quad y'=y+b$

لزوم الشّرط: النّقطة M' صورة M بانسحاب متّجهه $\vec{u}(a,b)$ فإن $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

$x'-x=a \ , \ y'-y=b$ نستنتج: $x'=x+a \quad , \quad y'=y+b$

كفاية الشّرط: إذا كان $x'=x+a \ , \ y'=y+b$ أي $x'-x=a \ , \ y'-y=b$

إذا كان $\vec{u}(a,b)$ فإنّ $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ أي M' صورة M بالانسحاب $\vec{u}(a,b)$

خاصة أساسية :

❶صورة ثنائية (A,B) هي ثنائية (A',B') تحقق $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$

وبالتّالي الانسحاب (يحافظ على المسافات والزوايا)

❷ M' صورة M بانسحاب متّجهه $\vec{u}(a,b)$ فإنّ

M صورة M' بانسحاب متجهه $-\vec{u}(-a,-b)$

مثال: أوجد صورة	$\Omega: x^2+2y^2+8x+y=0$	وفق انسحاب متجهه	$\vec{u}(2,-1)$

الحل: دساتير الانسحاب $x'=x+a \ , \ y'=y+b$

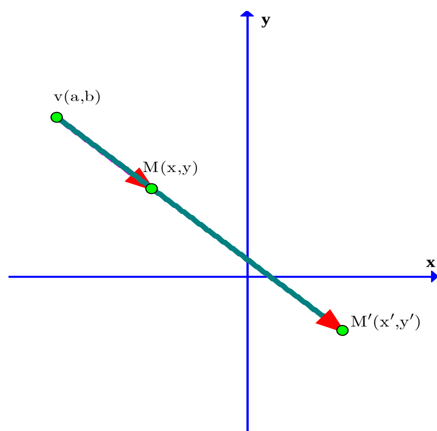
أي $x'=x+2 \ , \ y'=y-1$ ومنه $x=x'-2 \ , \ y=y'+1$

بالتعويض في معادلة Ω نجد $(x'-2)^2+2(y'+1)^2+8(x'-2)+y'+1=0$

بالإصلاح $x'^2+2y'^2+4x'+3y'-9=0$

حسب الترميز المألوف صورة Ω هي $\Omega': x^2+2y^2+4x+3y-9=0$

ثالثاً :التحاكي:



تعريف : $v(a,b)$ نقطة ثابتة من المستوي

و $k \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,-1\}$ نسمي تحاكي مركزه v ونسبته k

التّحويل الهندسي الّذي يرفق كل نقطة M من المستوي بالنّقطة

M' من المستوي بحيث $\overrightarrow{vM'} = k \cdot \overrightarrow{vM}$

* إذا كانت M تختلف عن M' فإنّ النّقاط v, M' , M تقع على استقامة واحدة

* خاصة أساسية : صورة ثنائية (A,B) هي ثنائية (A',B') تحقق $\overline{AB} = k \cdot \overline{A'B'}$

وبما أن $|k| \neq 1$ (التّحاكي لا يحافظ على المسافات)

$|k| < 1$, $k \neq 0$ التّحاكي لشكل هندسي هي عملية تصغير له

$|k| > 1$ التّحاكي لشكل هندسي هي عملية تكبير له

ملاحظة : إذا كان $k = -1$ فإنّ $\overrightarrow{vM'} = -\overrightarrow{vM}$ في هذه الحالة تحويل تناظر بالنّسبة إلى v

إذا كان $k = 1$ فإن $\overrightarrow{vM'} = \overrightarrow{vM}$ في هذه الحالة التحويل تطبيق تطبيق مطابق

عندما $k = 0$ فإن $\overrightarrow{vM'} = \vec{0}$ في هذه الحالة التّحويل تطبيق ثابت يحول أيّ شكل إلى نقطة المبدأ

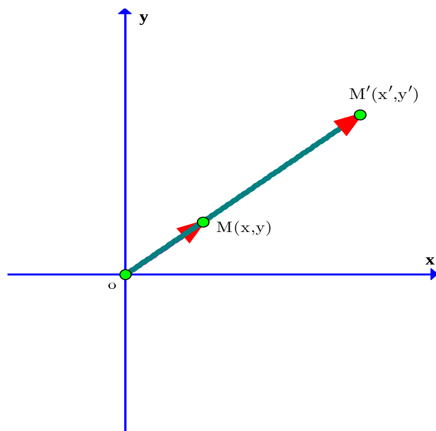
* مركز التّحاكي نقطة صامدة بهذا التّحاكي

* دساتير التّحاكي

$M'(x',y')$ صورة $M(x,y)$ وفق التّحاكي الّذي مركزه $v(a,b)$ ونسبته k فإن :

$$x' - a = k(x - a) \quad , \quad y' - b = k(y - b)$$

أو $$x' = k \cdot x + (1-k)a \quad , \quad y' = k \cdot y + (1-k)b$$



$$h_{(V,k)}(x,y)=(kx+(1-k)a,ky+(1-k)b)$$

في الحالة الخّاصة إذا كان مركز التّحاكي $O(0,0)$

فإن دساتير التّحاكي $x'=kx \;,\; y'=ky$

ومنه $h_{(O,k)}(x,y)=(kx,ky)$

مثال: أوجد صورة	$\Omega: x^2-y^2+3x+y+2=0$	وفق التحاكي الذي مركزه	$V(2,-4)$	ونسبته	$k=\frac{1}{2}$

الحل: دساتير التحاكي $x'=kx+(1-k)a \;,\; y'=ky+(1-k)b$

أي $x'=\frac{1}{2}x+(1-\frac{1}{2})(2) \;,\; y'=\frac{1}{2}y+(1-\frac{1}{2})(-4)$ ومنه $x'=\frac{1}{2}x-1 \;,\; y'=\frac{1}{2}y+2$

أي $x=2x'+2 \;,\; y=2y'-4$

بالتعويض في معادلة Ω نجد $(2x'+2)^2-(2y'-4)^2+3(2x'+2)+2y'-4+2=0$

بالإصلاح $4x'^2-4y'^2+14x'+18y'-8=0$

حسب الترميز المألوف صورة Ω هي $\Omega': 2x^2-2y^2+7x+9y-4=0$

رابعاً الدّوران :

تعريف : $v\,(a,b)$ نقطة ثابتة من المستوي الموجّه بمعلم متجانس

و $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k \;\; : k \in \mathbb{Z}\}$

نسمي دوران مركزه v وزاويته θ

التّحويل الهندسي الّذي يرفق كل نقطة M

من المستوي مختلفة عن v بالنّقطة M' من المستوي

بحيث $vM = vM'$ و $\widehat{\left(\overrightarrow{vM}, \overrightarrow{vM'}\right)} = \theta$

ملاحظة: إذا كانت $v\,(a,b)$ و $M'(x',y')$ صورة $M\,(x,y)$

عندما $\theta = 2\pi k \;\; , k \in \mathbb{Z}$ يكون $f\,(x,y) = (x,y)$ التّطبيق المطابق

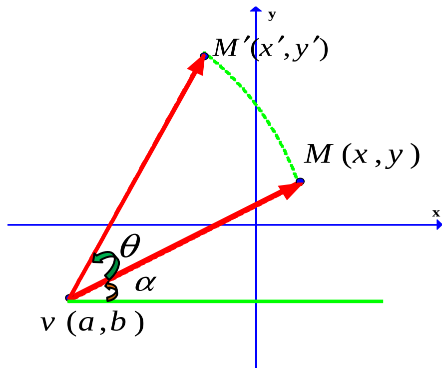
عندما $\theta = \pi + 2\pi k \;\; , k \in \mathbb{Z}$ يكون $f\,(x,y) = (2a - x, 2b - y)$ وهو تناظر بالنسبة إلى $v\,(a,b)$

خاصة أساسية :

صورة ثنائية (A,B) بالدّوران الذي مركزه v وزاويته θ هي ثنائية (A',B')

تحقق $AB = A'B'$ و $\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)} = \theta$ فالدّوران (يحافظ على المسافات)

دساتير الدّوران :



إذا كانت α قياس زاوية $\overrightarrow{vM}$ مع المحور $x'x$ فإن:

$$\overrightarrow{vM} = \left(|\overrightarrow{vM}|\cos(\alpha), |\overrightarrow{vM}|\sin(\alpha)\right)$$

و $$\overrightarrow{vM'} = \left(|\overrightarrow{vM'}|\cos(\alpha+\theta), |\overrightarrow{vM'}|\sin(\alpha+\theta)\right)$$

بما أن $|\overrightarrow{vM}| = |\overrightarrow{vM'}|$ فإن

$$\overrightarrow{vM'} = \left(|\overrightarrow{vM}|(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta), |\overrightarrow{vM}|(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta)\right)$$

لكن $x - a = |\overrightarrow{vM}|\cos\alpha \quad , \quad y - b = |\overrightarrow{vM}|\sin\alpha$

إذاً $\overrightarrow{vM'} = ((x-a)\cos\theta - (y-b)\sin\theta, (x-a)\sin\theta + (y-b)\cos\theta)$

ومنه $x' - a = (x-a)\cos\theta - (y-b)\sin\theta \quad , \quad y' - b = (x-a)\sin\theta + (y-b)\cos\theta$

أي
$$x' = (x-a)\cos\theta - (y-b)\sin\theta + a$$
$$y' = (x-a)\sin\theta + (y-b)\cos\theta + b$$

وهي دساتير الدوران الذي مركزه $v(a,b)$ وزاويته θ هو التحويل الهندسي

مثال: أوجد صورة	$\Omega: x^2 - y^2 + y + 2 = 0$	وفق الدوران الذي مركزه	$V(2,1)$	وزاويته	$\theta = \frac{\pi}{3}$

الحل: دساتير الدوران

$$x' = (x-a)\cos\theta + (y-b)\sin\theta + a \quad , \quad y' = (x-a)\sin\theta + (y-b)\cos\theta + b$$

أي $x' = (x-2)\left(\frac{1}{2}\right) + (y-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2 \quad , \quad y' = (x-2)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (y-1)\left(\frac{1}{2}\right) + 1$

ومنه $x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{3} + \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x + \sqrt{3}y = 2x' + 2 - \sqrt{3} \text{..........①} \\ \sqrt{3}x + y = 2y' + 2\sqrt{3} + 1 \text{........②} \end{cases}$$

نضرب ① بـ $\sqrt{3}$ نجد $\sqrt{3}x + 3y = 2\sqrt{3}x' + 2\sqrt{3} - 3$..........③

نطرح ② من ③ ونصلح نجد $y = \sqrt{3}x' - y' - 2$..........④

نضرب ② بـ $\sqrt{3}$ نجد $3x + \sqrt{3}y = 2\sqrt{3}y' + 6 + \sqrt{3}$..........⑤

نطرح ① من ⑤ ونصلح نجد $x = \sqrt{3}y' - x' + 2$..........⑥

بتعويض ④ و ⑥ في معادلة Ω نجد

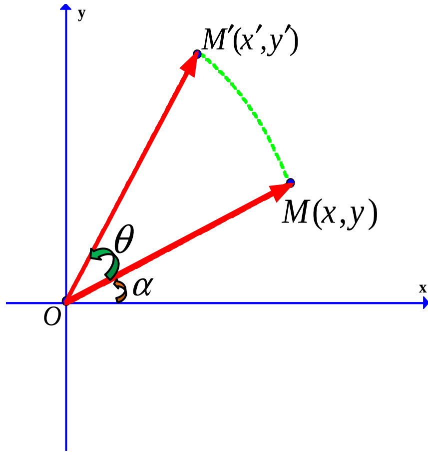
$$\left(\sqrt{3}y'-x'+2\right)^2-\left(\sqrt{3}x'-y'-2\right)^2+\left(\sqrt{3}x'-y'-2\right)+2=0$$

بالإصلاح

$$3y'^2+x'^2+4-2\sqrt{3}x'y'+4\sqrt{3}y'-4x'-3x'^2-y'^2-4+2\sqrt{3}x'y'-4y'+4\sqrt{3}x'+\sqrt{3}x'-y'=0$$

$$2y'^2-2x'^2+\left(5\sqrt{3}-4\right)x'+\left(4\sqrt{3}-5\right)y'=0$$

حسب الترميز المألوف صورة Ω هي $\Omega' : 2y^2-2x^2+\left(5\sqrt{3}-4\right)x+\left(4\sqrt{3}-5\right)y=0$



<u>الحالة الخاصة</u> : إذا كان مركز الدوران $v\,(0,0)$

فإن
$$x'=x\cos\theta-y\sin\theta$$
$$y'=x\sin\theta+y\cos\theta$$

و $f\,(x,y)=\left(x\cos\theta-y\sin\theta, x\sin\theta+y\cos\theta\right)$

كتابة التحويلات الهندسية باستخدام المصفوفات:

لمحة مختصرة عن المصفوفات :

نسمي $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$ مصفوفة سطريه ، نسمي $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ مصفوفة عموديه

نسمي $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة ذات سطرين وعمودين(مصفوفة مربّعة من المرتبة الثّانية)

نسمي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفاراً المصفوفة الصّفرية $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

نسمي المصفوفة المربعة التي عناصرها أصفاراً عدا عناصر القطر الرئيس كل منها واحد

مصفوفة واحدية $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ تلعب دور العدد واحد في عملية ضرب مصفوفتين

تساوي مصفوفتين : تتساوى مصفوفتان إذا كانت المصفوفتان من نفس النوع والمرتبة

وكل عنصر من المصفوفة الأولى يساوي مقابله من المصفوفة الثانية

مثال تتساوى المصفوفتان $\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ إذا وفقط إذا $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \\ c_1 = c_2 \\ d_1 = d_2 \end{cases}$

ضرب عدد حقيقي بمصفوفة : نضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة بذلك العدد

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a & \lambda \cdot b & \lambda \cdot c \\ \lambda \cdot d & \lambda \cdot e & \lambda \cdot f \end{bmatrix}$$

ضرب مصفوفتين : يجب أن يكون عدد أعمدة الأولى يساوي عدد أسطر الثّانية

والنّاتج مصفوفة عدد أسطرها عدد أسطر المصفوفة الأولى وعدد أعمدتها عدد أعمدة المصفوفة الثّانية

أمثلة ❶ $\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ dx+ey \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+cy & bx+dy \end{bmatrix}$

❷ $$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \end{bmatrix}$$

❸ يمكن استخدام جداء مصفوفتين للتعبّير عن الجّداء السّلمي لمتّجهين

نكتب الأوّل مصفوفة سطر $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix}$ والثّاني مصفوفة عمود $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$

يكون النّاتج مصفوفة وحيدة العنصر عنصرها هو الجّداء السّلمي

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \end{bmatrix}$$

❹ $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{bmatrix}$$

تفاصيل عملة الضّرب:

①السّطر الأوّل مضروباً بالعمود الأوّل (نضع النّاتج في نقطة تقاطع السّطر الأوّل مع العمود الأوّل)

$$\begin{bmatrix} \boxed{a \quad b} \\ c \quad d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{ax+bz} & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{bmatrix}$$

②السّطر الأوّل مضروباً بالعمود الثّاني (نضع النّاتج في نقطة تقاطع السّطر الأوّل مع العمود الثّاني)

$$\begin{bmatrix} \boxed{a \quad b} \\ c \quad d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz & \boxed{ay+bt} \\ cx+dz & cy+dt \end{bmatrix}$$

③السطر الثاني مضروباً بالعمود الأول (نضع الناتج في نقطة تقاطع السطر الثاني مع العمود الأول)

$$\begin{bmatrix} a \quad b \\ \boxed{c \quad d} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bt \\ \boxed{cx+dz} & cy+dt \end{bmatrix}$$

④السّطر الثّاني مضروباً بالعمود الثّاني(نضع النّاتج في نقطة تقاطع السّطر الثّاني مع العمود الثّاني)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{bmatrix}$$

مقلوب مصفوفة مربّعة من المرتبة الثّانية:

المصفوفة الواحديّة من المرتبة الثانية $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

محدد المصفوفة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$

مقلوب المصفوفة A هو المصفوفة A^{-1} التي تحقق $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$

فتكون $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ يكون لمصفوفة مربعة مقلوب عندما يكون محددها لا يساوي الصفر

النّتيجة : للحصول على مقلوب مصفوفة مربعة من المرتبة الثّانية هي المصفوفة النّاتجة عن المصفوفة نفسها بمبادلة عنصريّ القُطر الرّئيس وضرب عنصريّ القُطر الثّانوي بالعدد (-1)والضّرب بمقلوب محدد المصفوفة المفروضة

مثال ① : $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ يكون $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6+1 = -5$

ومنه $A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

مثال②: $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ سنسميها مصفوفة الدوران في المستوي

يكون $\Delta = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

وبالتالي $A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

حل معادلة مصفوفية $A \times X = B$ شرط الحل أن يكون Δ محدد المصفوفة A غير معدوم

وحل هذه المعادلة $X = A^{-1} \times B$

مثال : حل المعادلة $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 5\end{bmatrix}$

الحل $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=4+6=10$ يكون $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-2\\ 5\end{bmatrix}$

ومنه $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}4 & 2\\ -3 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2\\ 5\end{bmatrix}$ ومنه $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}4\times-2+2\times5\\ -3\times-2+1\times5\end{bmatrix}$ ومنه $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}\\ \frac{11}{10}\end{bmatrix}$

أي $x=\frac{1}{5}\ ,\ y=\frac{11}{10}$

التّعبير عن التّحويلات الهندسيّة باستخدام المصفوفات:

أولاً : الانسحاب الذي متجهه $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}$ نرمز له $t_{\vec{v}}(x,y)=(x+a,y+b)$

بالطريقة المصفوفيّة $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$ ومنه $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$

ثانياً: التّناظر (الانعكاس) بالنّسبة إلى مستقيم Δ نرمز له $g_{\Delta}(x,y)=(x',y')$

① إذا كان $\Delta: x=0$ فإن $g_{x=0}(x,y)=(-x,y)$

بالطّريقة المصفوفية $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

ومنه $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\times\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$ وبما أن $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=-(1)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$$

② إذا كان $\Delta: x=x_0$ فإن $g_{x=x_0}(x,y)=(2x_0-x,y)$

بالطّريقة المصفوفيّة $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2x_0\\ 0\end{bmatrix}$

ومنه $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

يكون $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 2x_0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ لكن $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

ومنه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_0 \\ 0 \end{bmatrix}$

③إذا كان $\Delta : y = 0$ فإن $g_{y=0}(x,y) = (x,-y)$

بالطّريقة المصفوفيّة $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و منه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

④إذا كان $\Delta : y = y_0$ فإن $g_{y=y_0}(x,y) = (x, 2y_0 - y)$

بالطّريقة المصفوفيّة $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2y_0 \end{bmatrix}$

ومنه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2y_0 \end{bmatrix}$

ثالثاً: التّناظر بالنّسبة إلى نقطة V نرمز له $g_V(x,y) = (x',y')$

❶التّناظر بالنّسبة إلى نقطة $O(0,0)$ نرمز له $g_{O(0,0)}(x,y) = (-x,-y)$

بالطّريقة المصفوفيّة $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

❷التّناظر بالنّسبة إلى نقطة $V(x_0, y_0)$ نرمز له $g_{V(x_0,y_0)}(x,y) = (2x_0-x, 2y_0-y)$

بالطّريقة المصفوفيّة $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{bmatrix}$

ملاحظة : مما سبق نجد أن التّناظر تقابل يساوي تقابل العكسي يمكن الحصول على المنحني النّظير بتعويض (x,y) بـ (x',y') في معادلة المنحني أي للحصول على نظير المنحني بالنّسبة إلى $V(x_0,y_0)$ نعوض $(2x_0-x,2y_0-y)$ بـ (x,y) في معادلة المنحني نجد معادلة المنحني النّظير

مثال : أوجد نظير المستقيم $D:3x-4y+1=0$ بالنّسبة إلى $V(-2,1)$

الحل : $(2x_0-x,2y_0-y)=(-4-x,2-y)$ نعوض في المستقيم نجد $3(-4-x)-4(2-y)+1=0$

بالإصلاح نجد $D':3x-4y+19=0$ نظير $D:3x-4y+1=0$ بالنّسبة إلى $V(-2,1)$

رابعاً : الدّوران

① الدّوران الّذي مركزه $O(0,0)$ وزاويته θ نرمز له $r_{(O,\theta)}(x,y)=(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta)$

بالطّريقة المصفوفية $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

بما أنّ $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

فإنّ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

مثال ① : أوجد صورة المستقيم $D:3x-y+4=0$ بدوران مركزه $O(0,0)$ زاويته $\theta=\frac{\pi}{3}$

الحل: بفرض $M'(x',y')$ صورة $M(x,y)$ وفق $r_{(O,\frac{\pi}{3})}$ فإن $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ومنه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y' \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y' \end{bmatrix}$

نجد $D:3x\text{-}y+4=0$ نعوض في معادلة المستقيم $x=\frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y'$, $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'$

$$3\left(\frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)\text{-}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'\right)+4=0$$

$D':\frac{3+\sqrt{3}}{2}x+\frac{3\sqrt{3}-1}{2}y+4=0$ الصورة المطلوبة $\frac{3+\sqrt{3}}{2}x'+\frac{3\sqrt{3}-1}{2}y'+4=0$

مثال ② : أوجد صورة المنحنى	$\mathcal{H}:2xy+1=0$	بدوران مركزه	$O(0,0)$	زاويته	$\theta=\frac{\pi}{4}$

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ ومنه $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ ومنه $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$

نجد $\mathcal{H}:2xy+1=0$ نعوض في معادلة المستقيم $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x'+y')$

$\mathcal{H}':y'^2-x'^2+1=0$ ومنه $2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-x'+y')\right)+1=0$

②الدّوران الّذي مركزه $V\ (x_0,y_0)$ وزاويته θ نرمز له

$$r_{(O,\theta)}(x,y)=((x-x_0)\cos\theta-(y-y_0)\sin\theta+x_0,(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta)$$

بالطّريقة المصفوفيّة

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{bmatrix}$$

ومنه

$$\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{bmatrix}$$

أي

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$$

مثال ① : أوجد صورة المستقيم	$D{:}x\text{-}2y+1=0$	بدوران مركزه	$V\,(2,-3)$	زاويته	$\theta=\frac{\pi}{4}$

الحل: بفرض $M'(x',y')$ صورة $M\,(x,y)$ وفق $r_{(V,\frac{\pi}{4})}$

فإنّ
$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4}\\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$$ ومنه $$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}x'+y'\\ -x'+y'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$$ ومنه $$y=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x'+y')-3\quad,\quad x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')+2$$

نعوض في معادلة المستقيم $D{:}x\text{-}2y+1=0$ نجد

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')+2\text{-}2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-x'+y')-3\right)+1=0$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'+9=0$$ الصّورة المطلوبة $$D':3\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+18=0$$

مثال ② : أوجد صورة المنحني	$\Omega{:}\sqrt{3}x(y-1)+(y-1)^2-3=0$

بدوران مركزه $V\,(2,1)$ زاويته $\theta=\frac{\pi}{6}$

الحل
$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6}\\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$ ومنه $$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

$y=\frac{1}{2}(y'-x')+1\quad,\quad x=\frac{\sqrt{3}}{2}(x'+y')+2$ نعوض في معادلة المنحني

$\Omega{:}\sqrt{3}x(y-1)+(y-1)^2-3=0$ نجد

$$\sqrt{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(x'+y')+2\right]\left(\frac{1}{2}(y'-x')\right)+\left(\frac{1}{2}(y'-x')\right)^2-3=0$$

$$\frac{3}{4}(y'^2-x'^2)+2\sqrt{3}(y'-x')+\frac{1}{4}\left(y'^2-2x'y'+x'^2\right)-3=0$$

ومنه $\Omega':y'^2-\frac{1}{2}x'^2-\frac{1}{2}x'y'+2\sqrt{3}(y'-x')-3=0$

أي $\Omega':2y^2-x^2-xy+4\sqrt{3}(y-x)-6=0$

خامساً: التّحاكي

① التّحاكي الّذي مركزه $O(0,0)$ نسبته k حيث $k\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,-1\}$ نرمز له

$h_{(O,k)}(x,y)=(k\cdot x,k\cdot y)$

بالطّريقة المصفوفيّة $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ ومنه $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{k}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$

مثال ① : أوجد صورة المستقيم $D:2x-4y+5=0$ بتحاكٍ مركزه $O(0,0)$ نسبته $k=2$

الحل : $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{k}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ ومنه $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ أي $x=2x'$ و $y=2y'$

نعوض في معادلة $D:2x-4y+5=0$ نجد $4x'-8y'+5=0$ الصّورة المطلوبة $D':4x-8y+5=0$

مثال ②: أوجد صورة المنحنى الّذي معادلته	$C:x^2+y^2-4=0$	بتحاكٍ مركزه	$O(0,0)$	نسبته	$k=2$

الحل:

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{k}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ ومنه $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ ومنه $x=\frac{1}{2}x',\ y=\frac{1}{2}y'$

بالتّعويض في المعادلة المفروضة نجد $\frac{1}{4}x'^2+\frac{1}{4}y'^2-4=0$ ومنه $C':x^2+y^2-16=0$

② التحاكي الّذي مركزه $V(x_0,y_0)$ نسبته k حيث $k\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,-1\}$ نرمز له

$$\begin{cases}x'-x_0=k(x-x_0)\\y'-y_0=k(y-y_0)\end{cases} \text{ أو } \begin{cases}x'=kx-kx_0+x_0\\y'=ky-ky_0+y_0\end{cases}$$

ومنه $h_{(v,k)}(x,y)=(k\cdot x-kx_0+x_0, k\cdot y-ky_0+y_0)$

بالطّريقة المصفوفيّة $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+(1-k)\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$ أو $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$

ويكون $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{k}\begin{bmatrix}x'-x_0\\y'-y_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$

مثال ① : أوجد صورة المستقيم $D:6x-9y+1=0$ بتحاكٍ مركزه $V(-1,2)$ نسبته $k=3$

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{k}\begin{bmatrix}x'-x_0\\y'-y_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$ ومنه $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}x'+1\\y'-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$

$x=\frac{1}{3}x'+\frac{1}{3}-1 \ , \ y=\frac{1}{3}y'-\frac{2}{3}+2$ أو $x=\frac{1}{3}x'-\frac{2}{3} \ , \ y=\frac{1}{3}y'+\frac{4}{3}$

نعوض في معادلة المستقيم $D:6x-9y+1=0$ نجد $6\left(\frac{1}{3}x'-\frac{2}{3}\right)-9\left(\frac{1}{3}y'+\frac{4}{3}\right)+1=0$

بالإصلاح نجد $2x'-3y'-15=0$ فمعادلة المستقيم المطلوب $D':2x-3y-15=0$

مثال ② : أوجد صورة المنحني الذي معادلته $\mathcal{P}:2x^2-5y+4=0$ بتحاكٍ مركزه $V(-1,0)$ نسبته $k=-\frac{1}{4}$

الحل : $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{k}\begin{bmatrix}x'-x_0\\y'-y_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$ ومنه $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}x'+1\\y'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$

أي $y=-\frac{1}{4}y'$, $x=-\frac{1}{4}x'-\frac{5}{4}$ بالتّعويض في معادلة المنحني المفروض $\mathcal{P}:2x^2-5y+4=0$ نجد

$2\left(-\frac{1}{4}x'-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{5}{4}y'+4=0$ بالإصلاح نجد $\mathcal{P}':\frac{1}{8}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{25}{8}+\frac{5}{4}y+4=0$

ومنه $\mathcal{P}':x^2+10x+10y+57=0$

خلاصة التّحويلات الهندسية:

فيما يلي : $M'(x',y')$ صورة $M(x,y)$ بالتّحويل الهندسي

و $M(x,y)$ الصورة العكسية لـ $M'(x',y')$

التّحويل الهندسي	العبارة التّحليلية للتّحويل الهندسي	العبارة المصفوفيّة للتّحويل الهندسي
الانسحاب	$t_{\vec{v}}(x,y)=(x+a,y+b)$ أو $\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$
تناظر بالنّسبة إلى $y\acute{y}$ محور التّراتيب	$g_{x=0}(x,y)=(-x,y)$ أو $\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$
تناظر بالنّسبة إلى مستقيم $\Delta : x=x_0$ يوازي محور التّراتيب	$g_{x=x_0}(x,y)=(2x_0-x,y)$ أو $\begin{cases} x'=2x_0-x \\ y'=y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2x_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2x_0 \\ 0 \end{bmatrix}$
تناظر بالنّسبة إلى $x\acute{x}$ محورالفواصل	$g_{y=0}(x,y)=(x,-y)$ أو $\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$
تناظر بالنّسبة إلى مستقيم $\Delta : y=y_0$ يوازي محور التّراتيب	$g_{y=y_0}(x,y)=(x,2y_0-y)$ أو $\begin{cases} x'=x \\ y'=2y_0-y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 2y_0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 2y_0 \end{bmatrix}$

تناظر بالنسبة إلى مبدأ الجمّلة $O(0,0)$	$g_{O(0,0)}(x,y)=(-x,-y)$ أو $\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$
تناظر بالنّسبة إلى $V\ (x_0,y_0)$	$g_{V\,(x_0,y_0)}(x,y)=(2x_0-x,2y_0-y)$ أو $\begin{cases} x'=2x_0-x \\ y'=2y_0-y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{bmatrix}$
الدّوران الّذي مركزه $O(0,0)$ مبدأ الجّملة زاويته θ	$r_{(O,\theta)}(x,y)=$ $(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta)$ أو $\begin{cases} x'=x\cos\theta-y\sin\theta \\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$
الدّوران الّذي مركزه $V\ (x_0,y_0)$ مبدأ الجّملة زاويته θ	$r_{(V,\theta)}(x,y)=$ $((x-x_0)\cos\theta-(y-y_0)\sin\theta+x_0,$ $(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta+y_0)$ أو $\begin{cases} x'=(x-x_0)\cos\theta-(y-y_0)\sin\theta+x_0 \\ y'=(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta+y_0 \end{cases}$ $\theta\neq\pi k\ \ :k\in\mathbb{Z}$	$\begin{bmatrix} x'-x_0 \\ y'-y_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x'-x_0 \\ y'-y_0 \end{bmatrix}$
التّحاكي الّذي مركزه $O(0,0)$ نسبته k حيث $k\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,-1\}$	$h_{(O,k)}(x,y)=(k\cdot x,k\cdot y)$ أو $\begin{cases} x'=kx \\ y'=ky \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{k}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$
التّحاكي الّذي مركزه $V\ (x_0,y_0)$ نسبته k حيث $k\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,-1\}$	$h_{(V,k)}(x,y)=$ $(k\cdot x-kx_0+x_0,k\cdot y-ky_0+y_0)$ أو $\begin{cases} x'=kx-kx_0+x_0 \\ y'=ky-ky_0+y_0 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x'-x_0 \\ y'-y_0 \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}=\frac{1}{k}\begin{bmatrix} x'-x_0 \\ y'-y_0 \end{bmatrix}$

مثال ①	: أوجد نظير الخطّ المنحني	$\Omega : x^2 - 4x + 2y = 2$	بالنسبة إلى	$A(-2,1)$

الحل : $M'(2x_0-x,2y_0-y)=(-4-x,2-y)$ نعوض في المنحني نجد

$$\Omega' : (-4-x)^2 - 4(-4-x) + 2(2-y) = 2$$

بالإصلاح نجد

$\Omega' : x^2 + 12x - 2y + 24 = 0$ نظير $\Omega : x^2 - 4x + 2y = 2$ بالنّسبة إلى $A(-2,1)$

مثال ②	: أوجد نظير الخطّ المنحني	$\Omega : x^2 + +2y^2 - 4x = 2$	بالنّسبة إلى المستقيم	$\Delta : x = 2$

الحل : $M'(2x_0-x,y)=(4-x,y)$ نعوض في معادلة المنحني

نجد $\Omega' : (4-x)^2 + 2y^2 - 4(4-x) = 2$ بالإصلاح نجد

$\Omega' : x^2 + 2y^2 - 4x = 2$ نظير $\Omega : x^2 + +2y^2 - 4x = 2$ بالنسبة إلى المستقيم $\Delta : x = 2$

مثال ③	: أوجد صورة الخط المنحنى	$\Omega : 4x^2 - 3y^2 - 6y = 1$	بالتحويل	$t_{\vec{v}(-3,2)} \circ g_{A(1,-2)}$

الحل :

$$\begin{aligned}(x',y') &= t_{\vec{v}(-3,2)} \circ g_{A(1,-2)}(x,y) = t_{\vec{v}(-3,2)}\left(g_{A(1,-2)}(x,y)\right) \\ &= t_{\vec{v}(-3,2)}(2-x,-4-y) \\ &= (2-x-3,-4-y+2) = (-1-x,-2-y)\end{aligned}$$

$(x',y') = (-1-x,-2-y)$ ومنه $x' = -1-x , y' = -2-y$

أي $x = -1-x' , y = -2-y'$ نعوض في معادلة المنحني Ω مع حذف $(\,')$

نجد $\Omega' : 4(-1-x)^2 - 3(-2-y)^2 - 6(-2-y) = 1$

بالإصلاح نجد

$\Omega' : 4x^2 - 3y^2 + 8x - 6y + 3 = 0$ صورة $\Omega : 4x^2 - 3y^2 - 6y = 1$ بالتّحويل $t_{\vec{v}(-3,2)} \circ g_{A(1,-2)}$

مثال④ : أوجد صورة الخطّ المنحني $\Omega:4x^2+y^2-6yx=1$ بالتّحويل $h_{(O,2)}\circ r_{(O,\frac{\pi}{4})}$

الحل $\begin{cases} x'=x\cos\theta-y\sin\theta \\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta \end{cases} \Leftrightarrow (x',y')=r_{(O,\theta)}(x,y)$ و

$(x',y')=h_{(O,k)}(x,y)\Leftrightarrow x'=kx\ ,\ y'=ky$

$$(x',y')=h_{(O,2)}\circ r_{(O,\frac{\pi}{4})}(x,y)$$
$$=h_{(O,2)}\left(r_{(O,\frac{\pi}{4})}(x,y)\right)$$
$$=h_{(O,2)}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y),\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\right)$$
$$(x',y')=\left(\sqrt{2}(x-y),\sqrt{2}(x+y)\right)$$

ومنه $y'=\sqrt{2}(x+y)....①$, $x'=\sqrt{2}(x-y)....②$

بجمع ① و ② $x'+y'=2\sqrt{2}x$ بطرح ② من ① $y'-x'=2\sqrt{2}y$

ومنه $\frac{x'+y'}{2\sqrt{2}}=x$ و $\frac{y'-x'}{2\sqrt{2}}=y$

نعوض في معادلة المنحني Ω مع حذف ($'$)

$$\Omega':4\left(\frac{x+y}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{y-x}{2\sqrt{2}}\right)^2-6\frac{y-x}{2\sqrt{2}}\frac{x+y}{2\sqrt{2}}=1$$

$$\Omega':4x^2+4y^2+y^2+x^2-6y^2+6x^2=8$$
$$\Omega':11x^2-y^2=8$$

فيكون $\Omega':11x^2-y^2=8$ صورة $\Omega:4x^2+y^2-6yx=1$ بالتحويل $h_{(O,2)}\circ r_{(O,\frac{\pi}{4})}$

سحب جملة المحاور الدّيكارتيّة

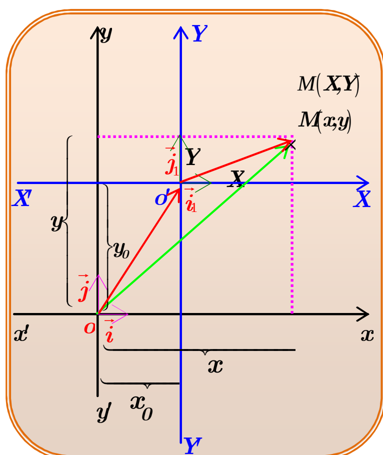
لتكن $x'x$ ، $y'y$ محاور جملة ديكارتيّة معْلَمُها $(o,\vec{i},\vec{j})$

ولتكن $X'X$ ، $Y'Y$ محاور لجملة ديكارتيّة أخرى جملة معْلَمُها $(o',\vec{i},\vec{j})$ حيث $o'(x_0,y_0)$

الجّملة الثّانية ناتجة عن الجّملة الأولى

بانسحاب متّجهه $\overline{oo'}$ إذا كانت النّقطة $M(x,y)$ في الجّملة الأولى

و $M(X,Y)$ في الجّملة الثّانية



عندئذٍ

$$\overrightarrow{oM} = \overrightarrow{oo'} + \overrightarrow{o'M}$$
$$x\vec{i} + y\vec{j} = (x_0\vec{i} + y_0\vec{j}) + (X\vec{i} + Y\vec{j})$$
$$= (x_0 + X)\vec{i} + (y_0 + Y)\vec{j}$$

ومنه $\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases}$ أو $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$

وهي قوانين تبيّن طريقة الانتقال من إحداثيات النّقطة في جملة إلى إحداثيات نفس النّقطة في جملة أخرى نسميهما قانونيّ سحب المحاور الإحداثية

مثال : إذا كانت معادلة المنحى Ω في الجّملة محاورها $X'X$ ، $Y'Y$

ومعْلَمُها $(o',\vec{i},\vec{j})$ هي $X^2 - 2Y^2 - 2X - 8Y = 0$ أوجد معادلته في جملة محورها $x'x$ ، $y'y$ و معْلَمُها $(o,\vec{i},\vec{j})$ حيث $o'(-1,2)$ في هذه الجملة

الحل : دساتير سحب المحاور $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$ أي $X = x + 1$, $Y = y - 2$

بالتّعويض في معادلة Ω نجد $(x+1)^2 - 2(y-2)^2 - 2(x+1) - 8(y-2) = 0$

بالإصلاح $x^2 - 2y^2 + 12 = 0$

مثال : إذا كانت معادلة المنحي Ω في الجّملة محاورها $X'X$ ، $Y'Y$ومعْلَمُها $(o',\vec{i},\vec{j})$

هي $aX^2+bY^2+cX+dY+e=0$

أوجد معادلته في جملة محوراها $x'x$ ، $y'y$ و معْلَمُها $(o,\vec{i},\vec{j})$ حيث $o'\left(\frac{c}{2a},\frac{d}{2b}\right)$ في هذه الجّملة

الحل : دساتير سحب المحاور $X=x-x_0$, $Y=y-y_0$ أي $X=x-\frac{c}{2a}$, $Y=y-\frac{d}{2b}$

بالتّعويض في معادلة Ω نجد $a\left(x-\frac{c}{2a}\right)^2+b\left(y-\frac{d}{2b}\right)^2+c\left(x-\frac{c}{2a}\right)+d\left(y-\frac{d}{2b}\right)+e=0$

$$a\left(x^2-\frac{c}{a}x+\frac{c^2}{4a^2}\right)+b\left(y^2-\frac{d}{b}x+\frac{d^2}{4b^2}\right)+cx-\frac{c^2}{2a}+dy-\frac{d^2}{2b}+e=0$$

بالإصلاح

$$ax^2-cx+\frac{c^2}{4a}+by^2-dy+\frac{d^2}{4b}+cx-\frac{c^2}{2a}+dy-\frac{d^2}{2b}+e=0$$

$$ax^2+by^2-\frac{c^2}{4a}-\frac{d^2}{4b}+e=0$$

نتيجة: للتّخلص من الجزء $cX+dY$ في المعادلة $aX^2+bY^2+cX+dY+e=0$ المنسوبة إلى الجّملة محاورها $X'X$ ، $Y'Y$ معْلَمُها $(o,\vec{i},\vec{j})$ نجري سحب إلى جملة محاورها $x'x$ ، $y'y$ و معْلَمُها $(o',\vec{i},\vec{j})$ حيث $o'\left(\frac{c}{2a},\frac{d}{2b}\right)$

ودساتير سحب المحاور $X=x-\frac{c}{2a}$, $Y=y-\frac{d}{2b}$

مثال : لتكن المعادلة $\Omega: X^2-2Y^2+6X-8Y+3=0$ منسوبة إلى الجّملة محاورها $X'X$ ، $Y'Y$ معْلَمُها $(o',\vec{i},\vec{j})$أوجد في جملة محاورها $x'x$ ، $y'y$ ومعْلَمُها $(o,\vec{i},\vec{j})$ معادلة Ω خالية من التركيب $cX+dY$

الحل : نعتبر $(3,2)=\left(\frac{c}{2a},\frac{d}{2b}\right)o'$ دساتير سحب المحاور $X=x-3$, $Y=y-2$

نعوض في معادلة Ω

$$(x-3)^2-2(y-2)^2+6(x-3)-8(y-2)+3=0$$
$$x^2-6x+9-2y^2+8y-8+6x-18-8y+16+3=0$$
$$x^2-2y^2+2=0$$

دوران جملة المحاور الدّيكارتيّة

لتكن $x'x$ ، $y'y$ محاور جملة ديكارتيّة متجانسة معْلَمُها $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

ولتكن $X'X$ ، $Y'Y$ محاور لجملة ديكارتيّة أخرى جملة متجانسة معْلَمُها $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$ حيث $\widehat{\left(\vec{i},\vec{u}\right)}=\theta$

الجّملة الثّانية ناتجة عن الجّملة الأولى بدوران زاويته θ

فإذا كانت النّقطة $M(x,y)$ في الجّملة الأولى

و $M(X,Y)$ في الجملة الثانية

$$\overrightarrow{oM}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$$

$$\vec{u}=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}$$

بما أنّ $\vec{v}=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\vec{i}+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\vec{j}$

$$\vec{v}=-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}$$

لكن $\overrightarrow{oM}=X\,\vec{u}+Y\,\vec{v}$ بالتّعويض

$$\overrightarrow{oM}=X\left(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}\right)+Y\left(-\sin\vec{i}+\cos\theta\vec{j}\right)$$

$$x\,\vec{i}+y\,\vec{j}=(X\cos\theta-Y\sin\theta)\vec{i}+(X\sin\theta+Y\cos\theta)\vec{i}$$

ومنه

$$\begin{cases}x=X\cos\theta-Y\sin\theta\\ y=X\sin\theta+Y\cos\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=X\cos\theta-Y\sin\theta\\ y=X\sin\theta+Y\cos\theta\end{cases}$$

أي

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}$$

ومنه

$$\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

أي

$$\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

ومنه

$$\begin{cases}X=x\cos\theta+y\sin\theta\\ Y=-x\sin\theta+y\cos\theta\end{cases}$$

ملاحظة :

إذا وجد في معادلة المنحني الحدّ المستطيل $(x\cdot y)$ نتخلّص منه عندما نجري دوران لجملة المحاور الإحداثية بزاوية $\frac{\pi}{4}$ أو أي زاوية ($\theta=\frac{n\pi}{4}+2\pi k$ حيث n عدد صحيح فردي و k عدد صحيح)

مثال : ليكن المنحني الذي معادلته في جملة متجانسة معْلَمُها $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ هي $x\cdot y=4$

اكتب معادلته في جملة متجانسة معْلَمُها $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$ حيث $\widehat{\left(\vec{i},\vec{u}\right)}=\frac{\pi}{4}$

الحل : لتكن $x'x$ ، $y'y$ محاور الجملة التي معْلَمُها $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

ولتكن $X'X$ ، $Y'Y$ محاور الجملة التي معْلَمُها $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$

فإن $\begin{cases} x=X\cos\theta-Y\sin\theta \\ y=X\sin\theta+Y\cos\theta \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=X\cos\frac{\pi}{4}-Y\sin\frac{\pi}{4} \\ y=X\sin\frac{\pi}{4}+Y\cos\frac{\pi}{4} \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y) \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \end{cases}$

بالتّعويض في المعادلة المفروضة $\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)=4$

$X^2-Y^2=8$

الانتقال من جملة محاور إلى جملة محاور أخرى

نعلم أن $\left(\mathbb{R}^2,+,\cdot\right)$فضاء شعاعي

الجُملة: هي كل مجموعة جزئية من الفضاء الشعاعي

أساس الفضاء الشعاعي : نسمي الجّملة من عناصر فضاء شعاعي أساس لهذا الفضاء إذا وفقط إذا كان كل عنصر من عناصر الفضاء يكتب بطريقة وحيدة في عناصر الجملة

وندعو عدد عناصر الأساس عدد أبعاد الفضاء الشعاعي

وكل أساسات الفضاء يكون عدد عناصر كل منها يساوي عدد أبعاد الفضاء

ونسمي الأساس قانوني إذا كانت متجهات الجملة لها نفس الطويلة ومتعامدة

وللفضاء $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ أساس قانوني الجملة $\left(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\right)$

لأن $\vec{i}(1,0)$, $\vec{j}(0,1)$ طويلة كل منهما (1)

ومتعامدان $\left(\widehat{\vec{i}\,,\vec{j}}\right)=\frac{\pi}{2}$ وكل متجه من $\mathbb{R}^2$ يكتب بطريقة وحيدة $(x\,,y)=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$

إذا كانت الجملة منها ذات متّجهين ومحدد الجّملة غير معدوم كانت هذه الجملة أساس للفضاء الشعاعي $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$

مثال ذلك : الجّملة $\{(1,-1)\,,(-3,2)\}$ أساس للفضاء $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$

لأنها ذات متجهين و $\begin{vmatrix}1 & -3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-1\neq 0$

وللانتقال من جملة إلى أخرى :

إذا كانت إحداثيات المتّجه $(X\,,Y)$ في الجملة $\left(O\,,\vec{u}\,,\vec{v}\right)$ و $(x\,,y)$ في الجّملة $\left(O\,,\vec{k}\,,\vec{h}\right)$

فإنّ $\overrightarrow{oM}=x\,\vec{k}+y\,\vec{h}=X\,\vec{u}+Y\,\vec{v}$ وتساعدنا هذه المساواة للانتقال من جملة إلى أخرى

مثال :في المستوي المنسوب للجّملة القانونية $\left(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ المنحني الّذي معادلته $x^2-2y^2=1$

بين أنّ الجّملة $\left\{\vec{u}(2,1),\vec{v}(-1,1)\right\}$ أساس للفضاء $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$

و اكتب معادلة المنحني في الجملة $\left(O\,,\vec{u}\,,\vec{v}\right)$

الحل : الجّملة ذات متّجهين و $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0$ فهي أساس للفضاء $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$

$(x\,,y)=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}=X\,\vec{u}+Y\,\vec{v}$ فيكون $x\,(1,0)+y\,(0,1)=X(2,1)+Y\,(-1,1)$

ومنه $x=2X-Y\;,\;y=X+Y$

بالتّعويض في معادلة المنحني المفروض نجد $(2X-Y)^2-2(X+Y)^2=1$

بالإصلاح $2X^2-8XY-Y^2=1$

بشكل عام إذا كانت: $\left\{\vec{u}(h,k)\ ,\ \vec{v}(h',k')\right\}$, $\left\{\vec{k}(a,b)\ ,\ \vec{h}(a',b')\right\}$ أساسين مختلفين للفضاء

الشّعاعي $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ فإن العبارة $\overrightarrow{oM}=x\vec{k}+y\vec{h}=X\vec{u}+Y\vec{v}$

تكتب $$\begin{bmatrix} a & a' \\ b & b' \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h & h' \\ k & k' \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

بما أنّ لكل من المصفوفتين معكوس أي $\begin{bmatrix} a & a' \\ b & b' \end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{ab'-a'b}\begin{bmatrix} b' & -a' \\ -b & a \end{bmatrix}$

فإن $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & a' \\ b & b' \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} h & h' \\ k & k' \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ أو $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\dfrac{1}{ab'-a'b}\begin{bmatrix} b' & -a' \\ -b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} h & h' \\ k & k' \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$

كذلك العكس بما أنّ لكل من المصفوفتين معكوس أي $\begin{bmatrix} h & h' \\ k & k' \end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{hk'-h'k}\begin{bmatrix} k' & -h' \\ -k & h \end{bmatrix}$

فإن $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h & h' \\ k & k' \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} a & a' \\ b & b' \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ أو $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=\dfrac{1}{hk'-h'k}\begin{bmatrix} k' & -h' \\ -k & h \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & a' \\ b & b' \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

حالة خاصّة

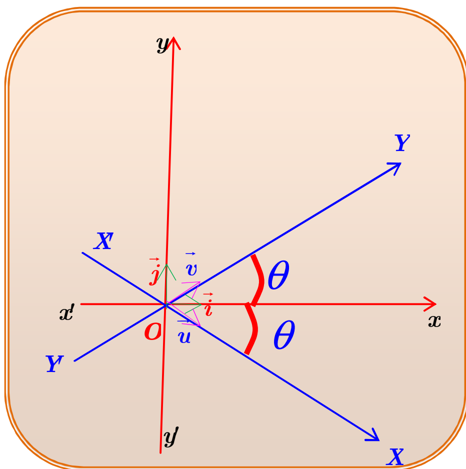
إذا كانت yOy' , xOx' محاور الأساس القانوني $(O,\vec{i},\vec{j})$

تنصّف الزّاوية بين محاور الأساس $(O,\vec{u},\vec{v})$

و $|\vec{u}|=|\vec{v}|=1$

ولتكن $\widehat{XOY}=2\theta$ فإن :

$$\left\{\vec{u}(\cos\theta,-\sin\theta)\ ,\ \vec{v}(\cos\theta,\sin\theta)\right\}$$



وعندئذ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & \sin\theta \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

ومنه $x=(X+Y)\cos\theta\ ,\ y=(Y-X)\sin\theta$

مثال :في المستوي المنسوب إلى الجّملة القانونيّة $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

لدينا المنحني $16x^2 - 9y^2 = 144$ اكتب معادلته في الجّملة $\left\{\vec{u}\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \;,\; \vec{v}\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)\right\}$

الحل: لاحظ $\left|\vec{u}\right| = \left|\vec{v}\right| = 1$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

ومنه $x = \frac{3}{5}(X + Y) \;,\; y = \frac{4}{5}(Y - X)$

بالتّعويض في المعادلة $16\left(\frac{3}{5}(X + Y)\right)^2 - 9\left(\frac{4}{5}(Y - X)\right)^2 = 1$

ومنه $\frac{144}{25}(X^2 + 2XY + Y^2) - \frac{144}{25}(X^2 - 2XY + Y^2) = 144$

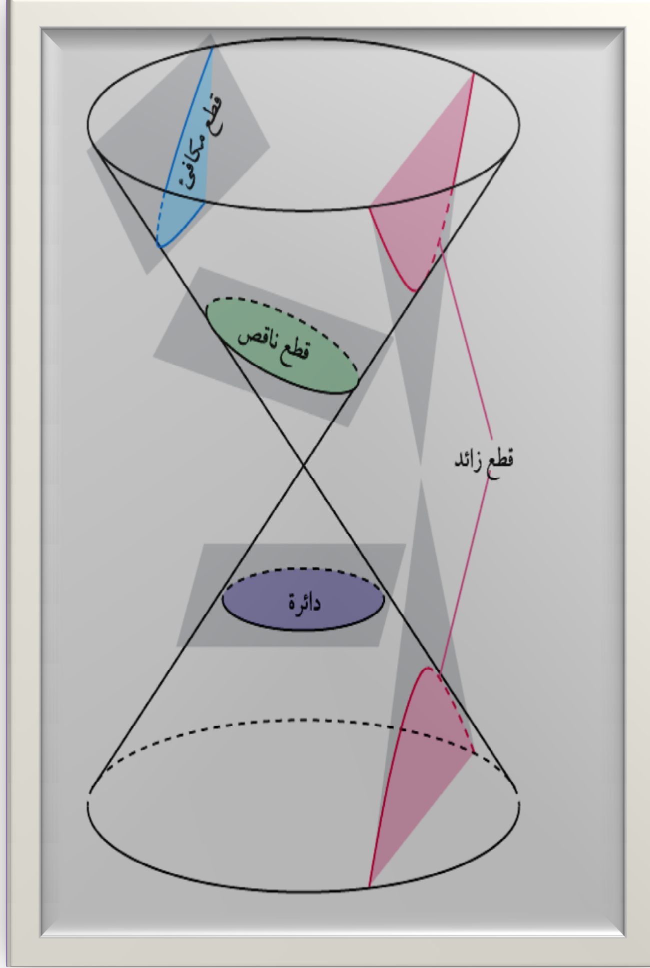
أي $\frac{1}{25}(4XY) = 1$ ومنه $XY = \frac{25}{4}$

الأستاذ أحمد أبو نبوت

الفصل الخامس :

الصفات الهندسية للقطوع المخروطية

في الشكل المجاور مقاطع في السطح المخروط تسمى القطوع المخروطية



كل قطع منها يقع في المستوي وترسمه

نقطة M تحقق نسبة بعدها

عن نقطة ثابتة F (نسميها المحرق)

إلى بعدها عن مستقيم ثابت Δ

(نسميه الدليل المتعلق بالمحرق)

يساوي عدد e حيث $e \in]0,+\infty[$

تعريف :

لتكن F نقطة ثابتة من نقاط المستوي (κ)

و Δ مستقيم ثابت في المستوي (κ)

و Δ لا يمر من F

القطع هو مجموعة نقط المستوي لكل نقطة منها الخاصية :

(نسبة بعد ها عن F إلى بعدها عن Δ يساوي عدداً e و $e \in]0,+\infty[$)

نسمي F محرق (أو بؤرة) ونسمي Δ الدليل المتعلق بالمحرق F

❋ إذا كانت $e \in]0,1[$ نسمي القطع ناقص (اهليج)، (e تنقص عن الواحد)

❋ إذا كانت $e \in]1,+\infty[$ نسمي القطع زائد (الهذلول) ، (e تزيد على الواحد)

❋ إذا كانت $e=1$ نسمي القطع قطع مكافئ (الشلجم)، (e تساوي الواحد)

❋ إذا كانت M نقطة من هذا القطع فإن $\frac{MF}{L(M,\Delta)}=e$

حيث $L(M,\Delta)$ هو بعد النقطة M عن المستقيم Δ

❋ المستقيم المار من F والعمود على Δ محور تناظر للقطع يسمى المحور الأساسي

البرهان : لتكن M نقطة من القطع و لتكن N

مسقط M على الدليل Δ فهي تحقق $\frac{MF}{MN}=e$......①

فإذا كانت M' نظيرة M بالنسبة للمستقيم ℓ

و N' مسقط M' على الدليل Δ، فإنّ N' نظيرة N

بالنسبة إلى ℓ

والتناظر يحافظ على الأطوال

فإنّ $MN=M'N'$, $MF=M'F'$

بالتعويض في ① نجد $\frac{M'F}{M'N'}=e$

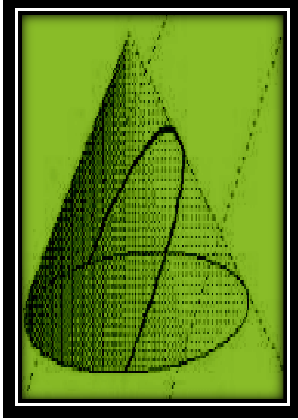
أي أن M' تحقق تعريف القطع فهي نقطة من القطع

وبالتالي فالمستقيم ℓ محور تناظر للقطع يسمى المستقيم ℓ المحور الأساسي للقطع

تعريف : نسمي النقطة رأس القطع إذا كانت نقطة تقاطع القطع مع المحور الأساسي للقطع

❋ عندما $e\to 0$ سنرى أن المنحني دائرة وعندها يكون الدليل في أبعد مكان من المستوي

الصفات الهندسية للقطوع

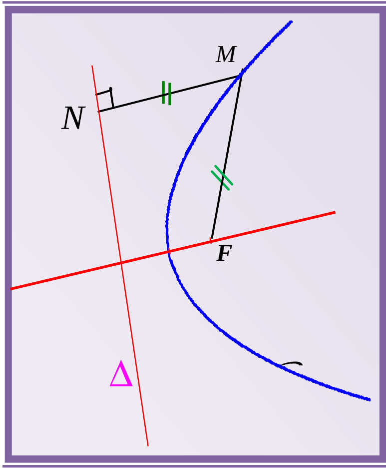


أولاً: القطع المكافئ :

من تعريف القطع وجدنا نقط القطع المكافئ تحقق:

$\frac{MF}{MN}=1$ حيث N مسقط M على دليل القطع

1 تعريف القطع المكافئ:



إذا كانت F نقطة و Δ مستقيم لا يمر من F واقعين في المستوي (κ)

القطع المكافئ مجموعة نقط المستوي M التي نسبة بعدها عن F إلى بعدها عن Δ يساوي 1 .

2 تعريف آخر للقطع المكافئ:

إذا كانت F نقطة و Δ مستقيم لا يمرّ من F يقعان في المستوي (κ)

القطع المكافئ مجموعة نقط المستوي M التي بعدها عن F يساوي بعدها عن Δ

أو $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow MF = MN$ حيث N مسقط M على دليل القطع

3 المماس والناظم

تعريف : نقول عن المستقيم أنه مماس لقطع مكافئ:

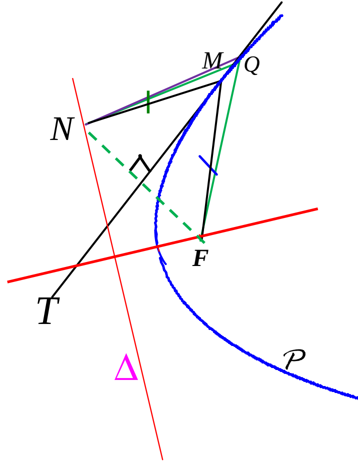
إذا كان يختلف عن محور القطع ويشترك مع القطع بنقطة وحيدة

الناظم: هو المستقيم العمود على المماس في نقطة التماس

الصفات الهندسية لمماسات القطع المكافئ :

مبرهنة:

مبرهنة:إذا كانت M نقطة على قطع مكافئ تختلف عن رأس القطع وكانت N المسقط القائم للنقطة M على Δ دليل القطع فإن المستقيم T محور القطعة المستقيمة $[FN]$ هو مماس للقطع



البرهان : بما أن $FM = NM$ حسب تعريف لقطع المكافئ

فإن $M \in T$ (خاصة محور القطعة المستقيمة)

بفرض T يقطع القطع في نقطة ثانية Q فإن $FQ = NQ$

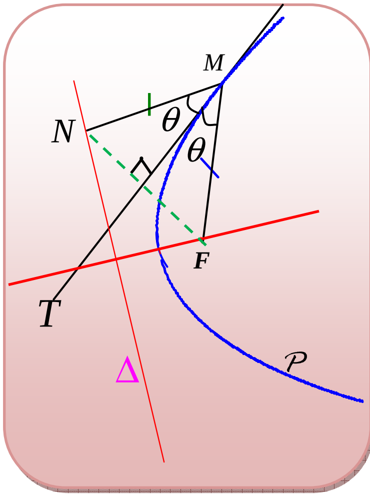
(Q تحقق تعريف القطع و خاصة محور القطعة المستقيمة)

وبالتالي (NQ) عمودي على الدليل Δ في N

أي أننا تمكنا من رسم (NQ) و (NM) عمودان على الدليل Δ في N

وهذا مستحيل أي أن T يشترك مع القطع في نقطة وحيدة M فهو المماس في M

نتائج:



① إذا كانت M نقطة على قطع مكافئ تختلف عن رأس القطع

وكانت N المسقط القائم للنقطة M على Δ

فإن المستقيم المماس T في M منصف داخلي للزاوية $\widehat{FMN}$

بما أن المثلث NMF متساوي الساقين حسب تعريف القطع

والمماس T محور للقطعة المستقيمة $[FN]$ حسب المبرهنة السابقة

فإن المماس T منصف داخلي لزاوية رأس المثلث أي منصف داخلي للزاوية $\widehat{FMN}$

② إذا كان المماس T في M يقطع دليل القطع في نقطة H فإن القطعة المستقيمة $[HM]$ من المماس ترى من المحرق F ضمن زاوية قائمة

من تطابق المثلثين HNM , MFH لأن :

($\widehat{NMH}=\widehat{HMF}$, $FM=NM$ و $[HM]$ مشترك)

نستنتج أن: $\widehat{MFH}=\widehat{HNM}=\frac{\pi}{2}$ فالقطعة المستقيمة $[HM]$ من المماس ترى من المحرق F ضمن زاوية قائمة

③ إذا كان المماس T يقطع محور القطع في A فإن $FA=FM$

البرهان: (MN) يوازي محور القطع ينتج عن ذلك

$\widehat{NMA}=\widehat{FAM}=\theta$ (بالتبادل) لكن $\widehat{NMA}=\widehat{HMF}=\theta$ (المماس T منصف للزاوية $\widehat{NMF}$)

إذن المثلث MFA متساوي الساقين أي $FA=FM$

④ **إذا كان $[MM']$ وتر محرقي و (MH) مماس للقطع حيث H نقطة من دليل القطع فإن (HM') مماس آخر للقطع**

البرهان : بما أن $\widehat{MFH}=\frac{\pi}{2}$ فإن $\widehat{HFM'}=\frac{\pi}{2}$ ، بفرض B المسقط القائم للنقطة M' على الدليل

فإن المثلثين BHM' , FHM' متطابقان ($\widehat{MFH}=\widehat{HFM'}=\frac{\pi}{2}$ ، $BM'=FM'$ ، $[HM']$ مشترك)

إذن $\widehat{HM'F}=\widehat{BM'H}$ حسب المبرهنة السابقة فإن (HM') مماس للقطع في M'

⑤ المماسين لقطع مكافئ في طرفي الوتر المحرقي متعامدين

$\widehat{BM'F}+\widehat{NMF}=\pi$ و $\widehat{FM'H}=\frac{1}{2}\widehat{BM'F}$ و $\widehat{HMF}=\frac{1}{2}\widehat{NMF}$

ومنه $\widehat{HM'F}+\widehat{HMF}=\frac{\pi}{2}$ إذن $\widehat{MHM'}=\frac{\pi}{2}$

⑥مجموعة نقط المستوي التي يرى منها قطع مكافئ ضمن زاوية قائمة هي نقاط دليل القطع

(حسب النتيجة ⑤)

⑦ إذا كان المماسان للقطع المكافئ متعامدين فإن نقطتي التماس هما طرفا وتر محرقي للقطع

⑧ المثلث NFB قائم في F تمر من رؤوسه دائرة مركزها H نصف قطرها HF نستنتج من ذلك

طريقة لرسم نقط القطع المكافئ الذي محرقه F ودليله Δ بطريقة هندسيةً :

❋نختار نقطة من الدليل نسميها H ثم نرسم

دائرة مركزها H ونصف قطرها HF

فهي تقطع الدليل في نقطتين B , N

❋نرسم من B , N ناظمين على الدليل نسميهما Δ_2 , Δ_1

❋نرسم من F ناظم على HF فهو يقطع Δ_2 , Δ_1

في N_2 , N_1 هما نقطتان من نقاط القطع

نعيد اختيار H على الدليل ونعيد الخطوات السابقة

نجد في كل مرة نقطتين كمن نقاط القطع المكافئ

⑨ لاحظ أن النقطتين N_2 , N_1 إحداهما تقع على محور $[NF]$

والأخرى تقع على محور $[BF]$ مما يتيح لنا استنتاج

طريقة أخرى لرسم نقطة من نقاط القطع المكافئ:

❋نختار نقطة N تقع على الدليل Δ

❋نرسم من N ناظم على الدليل Δ نسميه d_1

❋نرسم المستقيم d_2 محور للقطعة المستقيمة $[FN]$ تقاطع d_2 , d_1 في M نقطة من نقاط القطع

من التطبيقات العملية على القطع المكافئ:



إذا صنّعنا مرآة على شكل مجسم قطع مكافئ

(مجسم ينتج عن دوران قطع مكافئ حول محوره)

ووضعنا مصباح في محرق القطع فإن الأشعة المنبعثة

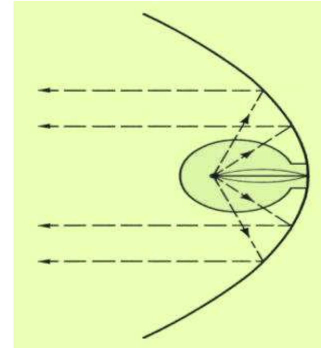
من المصباح ستنعكس على سطح المرآة حزمة متوازية توازي

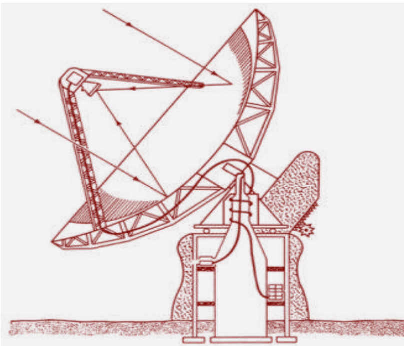
محور القطع وبالتالي سيكون المدى الذي تصل إليه الأشعة

المنعكسة كبيراً كالكشافات في الموانئ وأبيال الأطفال التي

تصدر الضوء الأحمر لمسافة بعيده ومصابيح الدبابة

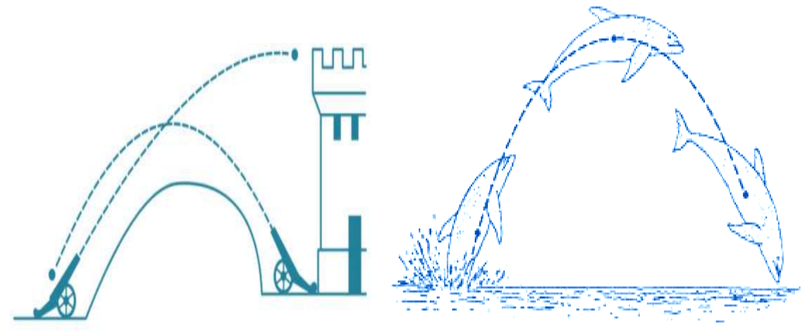
وكذلك بالعكس عند استقبال أشعة متوازية تتجمع في محرق القطع مثل ذلك استقبال بث الأقمار الصناعية ومحطات البث والرصد







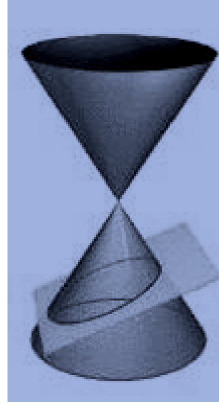
ويكون مسار القذيفة على شكل قطع مكافئ وكذلك مسار كره مرتدة عن الأرض

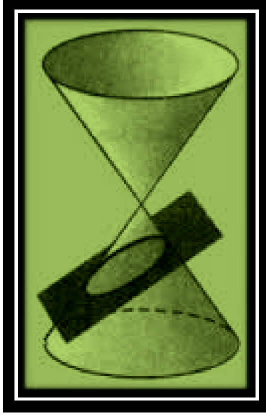




ثانياً:القطع الناقص:







1 إذا كانت H مسقط F على Δ يوجد نقطتين A', A تقسمان $[HF]$ تقسيماً توافقياً بنسبة $e \in]0,1[$

أي : $\frac{AF}{AH} = \frac{A'F}{A'H} = e$......★

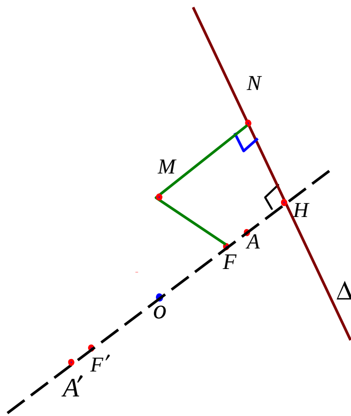
وبالتالي فإن A', A نقطتان من القطع نسميهما رأسي القطع الناقص

بفرض O منتصف $[AA']$

والبعد بين الرأسين $AA' = 2a$ نسميه القطر المحرقي

وإذا كانت F' نظيرة F بالنسبة إلى O (نسمي F', F المحرقين)

ونرمز $FF' = 2c$ نسميه البعد المحرقي



2 إذا استخدمنا خواص التناسب على العلاقة ★

نجد $\frac{A'F - AF}{A'H - AH} = e$ أو $\frac{AO + OF - AO + OF}{AA'} = e$ ومنه $\frac{a + c - a + c}{2a} = e$

النتيجة $\frac{c}{a} = e$ ومنه $e = \frac{2c}{2a}$

الاختلاف المركزي هو نسبة البعد بين المحرقين إلى البعد بين الرأسين

3 حساب بعد الدليل عن O: $OH = OF + FH$ بما أن $\frac{AF}{AH} = e$

حسب خواص التناسب تكتب $\frac{AF}{AH + AF} = \frac{e}{1+e}$

لكن $AF = a - c$ فيكون $\frac{a-c}{FH} = \frac{e}{1+e}$ ومنه $FH = \frac{(1+e)(a-c)}{e}$

إذاً : $OH = c + \frac{(a-c)(1+e)}{e}$ أو $OH = \frac{a-c+ae}{e}$

لكن $c = a \cdot e$ بالتعويض نجد $OH = \frac{a}{e}$

4 إذا كان Δ' نظير Δ بالنسبة إلى O نسمي Δ' الدليل المتعلق بـ F'

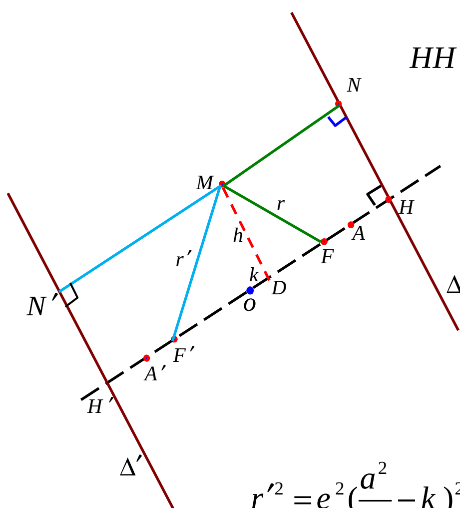
يكون البعد بين الدليلين $HH' = \frac{2c}{e^2} = \frac{2a}{e}$ هو نسبة البعد المحرقي إلى مربع الاختلاف المركزي

أو هو نسبة البعد بين الرأسين إلى الاختلاف المركزي

إن المبرر الذي يسمح لنا بتسمية المحرق F' ودليله Δ' أنهما يحققان التعريف

البرهان : انظر للشكل المجاور من المثلث MDF:

نجد $OD = k$ بفرض $MD = h$ و يكون $r^2 = (c-k)^2 + h^2$



لكن $r = e \cdot MN = e \cdot DH = e(\frac{a^2}{c} - k)$ لأن $HH' = \frac{2c}{e^2} = \frac{2a^2}{c}$

$$e^2(\frac{a^2}{c} - k)^2 = h^2 + (c-k)^2 \text{..........①}$$

$$r'^2 = h^2 + (c+k)^2 \text{..............②}$$

بطرح المعادلتين ① من ②

$r'^2 - e^2(\frac{a^2}{c} - k)^2 = (c+k)^2 - (c-k)^2$ ومنه $r'^2 = e^2(\frac{a^2}{c} - k)^2 + 4ck$

$$r'^2 = e^2(\frac{a^4}{c^2} - 2\frac{a^2}{c}k + k^2 + \frac{4ck}{e^2})$$

$$= e^2(\frac{a^4}{c^2} - 2\frac{a^2}{c}k + k^2 + \frac{4ck}{\frac{c^2}{a^2}})$$

$r'^2 = e^2(\frac{a^4}{c^2} + 2\frac{a^2}{c}k + k^2)$ ومنه $r'^2 = e^2(\frac{a^2}{c} + k)^2$

إذاً $r' = e(\frac{a^2}{c} + k)$

لكن $HD = (\frac{a^2}{c} + k)$ تكتب العلاقة $r' = e(\frac{a^2}{c} + k)$ بالشكل $MF' = eHD$

أو $MF' = eMN'$ أي $\frac{MF'}{MN'} = e$ إذاً المحرق F' ودليله Δ' يحققان التعريف

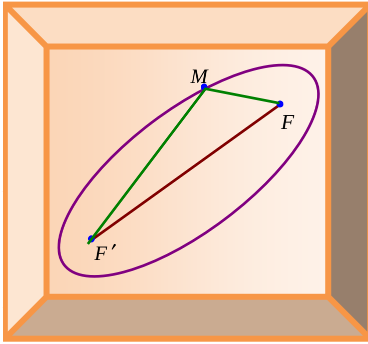
5 نتيجة : وجدنا أن $r = e(\frac{a^2}{c} - k)$ و $r' = e(\frac{a^2}{c} + k)$ بالجمع $r + r' = e(\frac{a^2}{c} - k) + e(\frac{a^2}{c} + k)$

ومنه $r + r' = 2e\frac{a^2}{c} = 2\frac{c}{a}\cdot\frac{a^2}{c}$ أي $r + r' = 2a$

أو $r + r' = AA'$ أي مجموع نصفي القطرين المحرقين يساوي البعد بين الرأسين

النتيجة : يمكن صياغة تعريف آخر للقطع الناقص

تعريف:



لتكن F', F نقطتين ثابتتين في المستوي (κ) القطع الناقص

هو مجموعة نقط هذا المستوي (κ) التي مجموع بعدي كل

منها عن هاتين النّقطتين يساوي طولاً ثابتاً $2a$ (طول القطر المحرقي).

نُرمِّز القطع النّاقص بالرّمز $\mathcal{E}$ فيكون:

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow MF + MF' = 2a$$

نستنتج : طريقة لرسم القطع الناقص

نأخذ خيط طوله ثابت $\ell = 2a$ نثبت طرفاه في النقطتين F', F

وبرأس قلم نشد الخيط وندور بحيث يبقى الخيط مشدود يرسم رأس القلم

القطع الناقص لأنه يتحقق من أجل كل نقطة $MF + MF' = 2a$

6 رسم نقطة من القطع الناقص:

لتكن F', F نقطتين ثابتتين من المستوي ولتكن الدائرة C

التي مركزها F' ونصف قطرها $2a > 2FF'$ وليكن $(F'Z]$

نصف مستقيم يقطع الدائرة C في N نرسم محور القطعة المستقيمة $[FN]$ و

فيلاقي نصف المستقيم $(F'Z]$ في نقطة وحيدة M

هذه النقطة تحقق $MN = MF$ و $MF' + MF = MF' + MN = NF' = 2a$

نستنتج يمكن رسم نقطة من القطع الناقص:

- ❈ نرسم دائرة C مركزها F' نصف قطرها $2a > 2FF'$
- ❈ نرسم نصف مستقيم $(F'Z]$ يقطع الدائرة C في N
- ❈ نرسم محور القطعة المستقيمة $[FN]$ وليكن المستقيم d
- ❈ المستقيم d يلاقي نصف المستقيم $(F'Z]$ في نقطة وحيدة M

$\left(\{M\} = [F'Z) \cap d\right)$ ومنه $M \in \mathcal{E}$

ونستنتج:

1 المستقيم d مماس للقطع في M لأنها نقطة مشتركة وحيدة بين القطع والمستقيم d

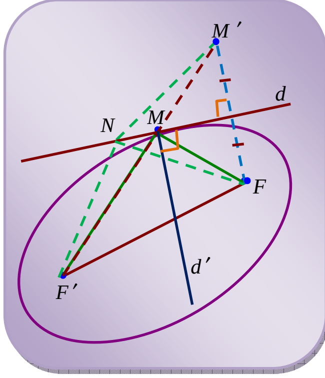
❷ المماس d منصف داخلي للزاوية $\widehat{FMN}$

لأنه محور المثلث المتساوي الساقين NMF فالناظم في M منصف داخلي للزاوية $\widehat{FMF'}$

مبرهنة:

ليكن $\mathcal{E}$ قطع ناقص محرقاه F',F البعد بين رأسيه $2a$ ولتكن M نقطه منه مختلفة عن أحد الرأسين

ولتكن M' نقطة من نصف المستقيم $[F'M)$ حيث $F'M' = 2a$



1 المماس d للقطع الناقص $\mathcal{E}$ في M هو محور للقطعة المستقيمة

2 الناظم d' للقطع الناقص $\mathcal{E}$ في M هو المنصف الداخلي للزاوية

البرهان:

1 ليكن المستقيم d محوراً للقطعة المستقيمة $[FM']$

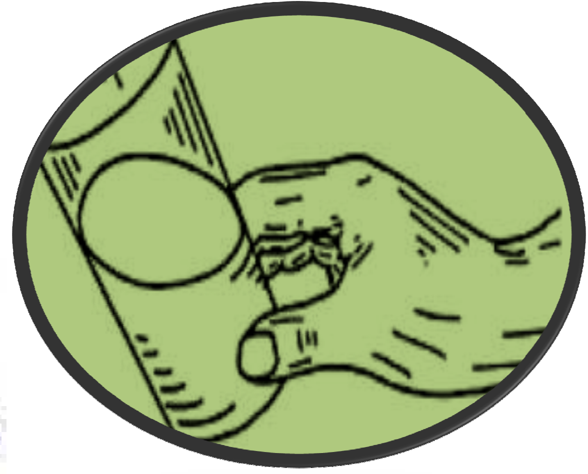
ولنبرهن أنه مماس للقطع في M

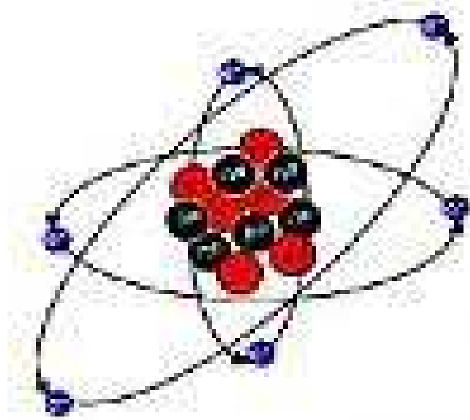
حسب تعريف M' فإن: $MM' = 2a - MF = MF + MF' - MF' = MF$

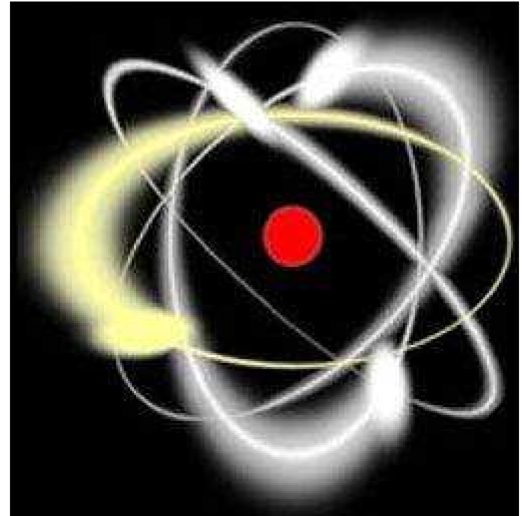
أي أن النقطة M تقع على محور القطعة المستقيمة $[FM']$ ومنه $M \in d$ ولنبين أن M هو النقطة المشتركة الوحيدة بين d والقطع إذا فرضنا وجود نقطة أخرى $N \in d \cap \mathcal{E}$ ولدينا M' , M , F' على استقامة واحده تكون M' , N , F' ليست على استقامة واحدة وبالتالي حسب المتراجحات في المثلث $NF' + NM' > M'F' = 2a$ لكن $N \in d$ يكون $NM' = NF$ بالتعويض في المتراجحة نجد $NF' + NF > 2a$ وهذا يعني $N \notin \mathcal{E}$ أي أن M هي النقطة الوحيدة المشتركة بين d و $\mathcal{E}$

وبالتالي المستقيم d يمس $\mathcal{E}$ في M

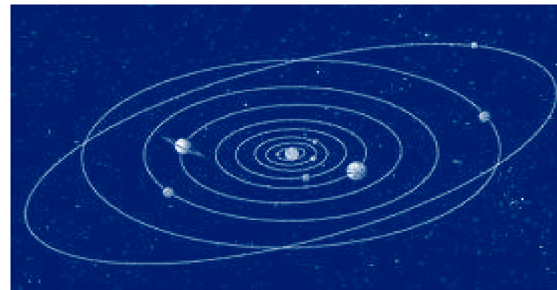
2 إن المستقيم d هو المنصف الداخلي لزاوية الرأس $\widehat{FMM'}$ لأنه محور لقاعدة المثلث المتساوي الساقين FMM' فهو المنصف الخارجي للزاوية $\widehat{FMF'}$ يكون المستقيم الناظم العودي على d في M هو المنصف الداخلي للزاوية $\widehat{FMF'}$



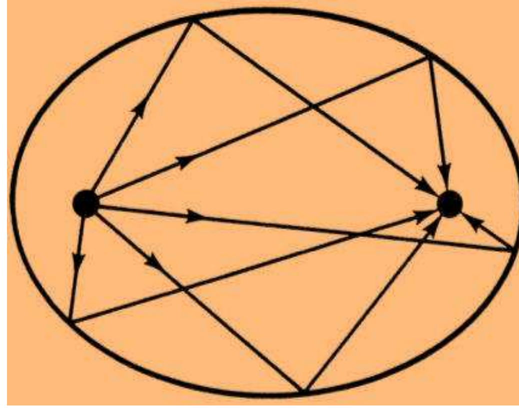




مسارات إلكترونات الذره حول النواة



مسارات الكواكب حول الشمس



كل شعاع ينطلق من محرق القطع ينعكس ماراً من المحرق الآخر

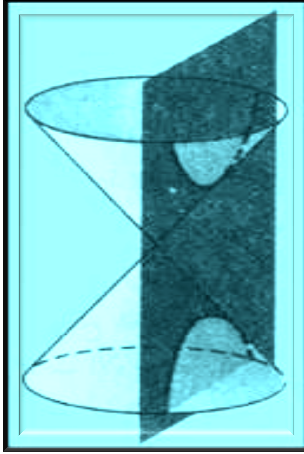




صمم جهاز تفتيت بحصة الكلية بحثث يحتوي مرآة عاكسة على شكل مجسم قطع ناقص على أن تنطلق الأشعة من أحد المحرق للقطع الناقص ويوضع المريض بحيث تكون بحصة الكلية في المحرق الآخر للقطع يقوم الجهاز المصمم خصوصاً لهذه الغاية بإرسال موجات موجّهة تنعكس متجمعة نحو الحصاة أو الحُصيات فتقوم بتدميرها وتحويلها إلى "رمال" ناعمة. يستغرق هذا الإجراء خمس وأربعين إلى ستين دقيقة وهو يُجرى تحت التخدير العام، قد يُعطى المريض سماعات لحماية طبلة الأذن من الضجة المرتفعة التي يُصدرها الجهاز. يقوم الجسم بطرح الرمال الناعمة الناتجة عن التفتيت مع البول بكل سهولة

الأستاذ لأحمد أبو نبوت

ثالثاً : القطع الزائد

قبة تبريد طبيعي تنتج عن دوران قطع زائد حول محوره اللامحرقي

❶ إذا كانت H مسقط F على Δ يوجد نقطتين $A\ ,\ A'$

تقسمان $[HF]$ تقسيماً توافقياً بنسبة $e \in]1,+\infty[$ أي :

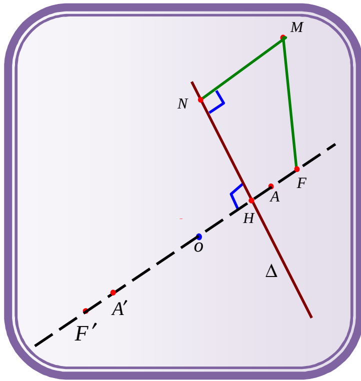
$$\frac{AF}{AH}=\frac{A'F}{A'H}=e ......★$$

وبالتالي فإن $A\ ,\ A'$ نقطتان من القطع نسميهما رأسي القطع الزائد

بفرض O منتصف $[AA']$ والبعد بين الرأسين $AA'=2a$ نسميه القطر المحرقي

وإذا كانت F' نظيرة F بالنسبة إلى O (نسمي $F\ ,\ F'$ المحرقين)

ونرمز $FF'=2c$ نسميه البعد المحرقي



❷ إذا استخدمنا خواص التناسب على العلاقة ★

نجد $\frac{A'F-AF}{A'H-AH}=e$ أو $\frac{AO+OF-AO+OF}{AA'}=e$

ومنه $\frac{a+c-a+c}{2a}=e$

النتيجة : $e=\frac{2c}{2a}$ **الاختلاف المركزي هو نسبة البعد المحرقي إلى القطر المحرقي**

③ حساب بعد الدليل عن O: لدينا $OH = OF - FH$

لكن $\frac{AF}{AH} = e$ وحسب خواص التناسب $\frac{AF}{AH + AF} = \frac{e}{1+e}$ لكن $AF = c - a$

إذاً $\frac{c-a}{FH} = \frac{e}{1+e}$ ومنه $FH = \frac{(1+e)(c-a)}{e}$ فيكون

$OH = c - \frac{(c-a)(1+e)}{e}$ أو $OH = \frac{a - c + ae}{e}$

لكن $\frac{c}{a} = e$ أي $c = a \cdot e$ بالتعويض نجد $OH = \frac{a}{e}$

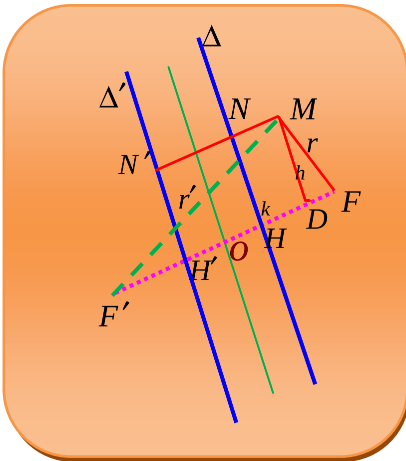
④ إذا كان Δ' نظير Δ بالنسبة إلى O نسمي Δ' الدليل المتعلق بـ F' يكون البعد بين الدليلين

$HH' = \frac{2c}{e^2} = \frac{2a}{e}$ هو نسبة البعد المحرقي إلى مربع الاختلاف المركزي

أو هو نسبة البعد بين الرأسين إلى الاختلاف المركزي و $OH = OH' = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$

إن المبرر الذي يسمح لنا بتسمية المحرق F' ودليله Δ' أنهما يحققان التعريف

البرهان : من المثلث MDF: وبفرض $OD = k$ و $MD = h$ نجد $r^2 = (c-k)^2 + h^2$



لكن $r = e \cdot MN = e \cdot DH = e(k - \frac{a^2}{c})$

$e^2(k - \frac{a^2}{c})^2 = h^2 + (c-k)^2$..........①

من المثلث MDF':

$r'^2 = h^2 + (c+k)^2$...............②

بطرح المعادلتين ① من ② $r'^2 - e^2(k - \frac{a^2}{c})^2 = (c+k)^2 - (c-k)^2$

$r'^2 = e^2(k - \frac{a^2}{c})^2 + 4ck$

$$r'^2 = e^2\left(\frac{a^4}{c^2} - 2\frac{a^2}{c}k + k^2 + \frac{4ck}{e^2}\right) \quad \text{ومنه} \quad r'^2 = e^2\left(\frac{a^4}{c^2} - 2\frac{a^2}{c}k + k^2 + \frac{4ck}{\frac{c^2}{a^2}}\right)$$

$$r'^2 = e^2\left(\frac{a^4}{c^2} + 2\frac{a^2}{c}k + k^2\right) \quad \text{أي} \quad r'^2 = e^2\left(\frac{a^2}{c} + k\right)^2$$

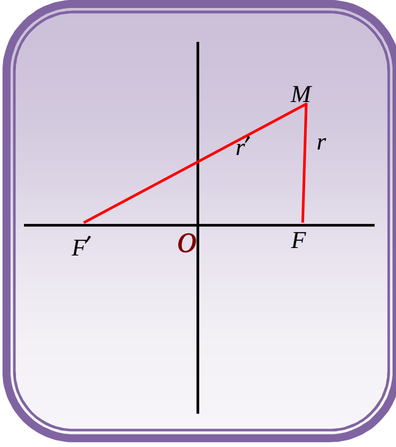
ومنه $r' = e\left(\frac{a^2}{c} + k\right)$

لكن $HD = \left(\frac{a^2}{c} + k\right)$ تكتب العلاقة $r' = e\left(\frac{a^2}{c} + k\right)$ بالشكل $MF' = eHD$

أو $MF' = eMN'$ أي $\frac{MF'}{MN'} = e$

5 نتيجة : وجدنا أن $\frac{MF}{MN} = \frac{MF'}{MN'} = e$ ومنه $\frac{|MF' - MF|}{|MN' - MN|} = e$

أو $\frac{|MF - MF'|}{NN'} = e$ وبالتالي $\frac{|MF - MF'|}{\frac{2a}{e}} = e$ ومنه $|MF - MF'| = 2a$



تعريف آخر للقطع الزائد:

لتكن F', F نقطتين ثابتتين في المستوي (κ) القطع الزائد مجموعة نقط المستوي (κ) التي فرق بعدي كل منها عن F وF' يساوي طولاً ثابتاً $2a$ (طول القطر المحرقي).

نُرِّمز القطع الزائد بالرّمز $\mathcal{H}$ فيكون:

$$M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow |MF - MF'| = 2a$$

رسم نقط القطع الزائد:

لتكن F , F' نقطتين ثابتتين من المستوي ولتكن الدائرة C التي مركزها F' ونصف قطرها $2a$ وليكن نصف مستقيم $[F'Z)$ يقطع الدائرة C في N نرسم محور القطعة المستقيمة $[FN]$ وليكن d فيلاقي نصف المستقيم $[F'Z)$ في نقطة وحيدة M

هذه النقطة تحقق $MN = MF$ و $MF' - MF = MF' - MN = 2a$

نستنتج طريقة لرسم القطع الزائد

يمكن رسم نقطة من القطع الزائد من الفرع المتعلق بالمحرق F:

❋ نرسم دائرة C مركزها F' نصف قطرها $2a < 2FF'$

❋ نرسم نصف مستقيم $[F'Z)$ يقطع الدائرة C في N

❋ نرسم محور القطعة المستقيمة $[FN]$ وليكن D

❋ المستقيم d يلاقي نصف المستقيم $[F'Z)$ في نقطة وحيدة

M $(\{M\} = [FZ) \cap d)$ النقطة M تحقق تعريف القطع الزائد $MF' - MF = 2a$ إذاً $M \in \mathcal{H}$

وبما أن $MF' > MF$ فالنقطة من فرع القطع الأقرب إلى المحرق F

ولرسم نقطة من الفرع المتعلق بالمحرق F'

نرسم الدائرة التي مركزها F نصف قطرها

$2a < 2FF'$ ونرسم نصف المستقيم $[FZ)$ الذي يقطع

الدائرة C في N نرسم محور القطعة المستقيمة

$[F'N]$ وليكن d يلاقي نصف المستقيم $[F'Z)$

في نقطة وحيدة M تحقق تعريف القطع الزائد $MF - MF' = 2a$ إذاً $M \in \mathcal{H}$

وبما أن $MF > MF'$ فالنقطة من فرع القطع الأقرب إلى المحرق F'

ونستنتج :

1 المستقيم d مماس للقطع في M لأنها نقطة مشتركة وحيدة بين القطع والمستقيم D

2 المماس d منصف داخلي للزاوية $\widehat{FMF'}$ لأنه محور المثلث المتساوي الساقين NMF

مبرهنة :إذا كان d مستقيم مماس للقطع الزائد في نقطة M مختلفة عن الرأس فإن d هو المنصف الداخلي للزاوية $\widehat{FMF'}$

البرهان : بما أن M نقطة من القطع الزائد فإن $|MF - MF'| = 2a$ حيث $2a$ البعد بين الرأسين

فإن كانت M أقرب إلى F فإن $MF' - MF = 2\ell$

يوجد N على MF' بحيث $NF' = 2\ell$

فيكون :

$$MN = MF' - NF' = MF' - 2\ell = MF' - MF' + MF = MF$$

فالمثلث MNF متساوي الساقين أي أن M

نقطة من القطع الزائد وتقع على محور القطعة المستقيمة

$[NF]$ أي $M \in \mathcal{H} \cap d$

لنفرض M' نقطة من القطع الزائد وتقع على محور القطعة المستقيمة $[NF]$ أي $M' \in \mathcal{H} \cap d$

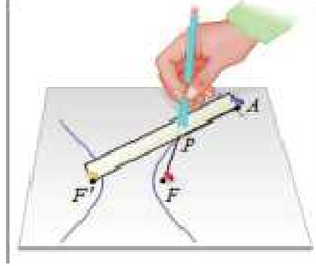
ومنه $M'F = M'N$ لأن $M' \in d$ والنقاط M', F', N ليست على استقامة واحدة

تحقق $|M'F' - M'N| > F'N$ لكن $M'F = M'N$ و $NF' = 2a$

ومنه $|M'F' - M'F| > 2a$ وبالتالي $M' \notin \mathcal{H}$ وهذا تناقض أي أن M هي النقطة الوحيدة بين d و $\mathcal{H}$ فالمستقيم d مماس للقطع $\mathcal{H}$

لكن المثلث MNF متساوي الساقين و محور d القطعة المستقيمة $[NF]$ قاعدة المثلث

فإن d هو المنصف الداخلي للزاوية $\widehat{FMF'}$



ليكن لدينا المستوي المؤلف من قطعة كرتون مقوى ومسطرة طولها ℓ ومسمارين وخيط طوله h أقصر من طول المسطرة $h < \ell$، نثبت طرف المسطرة إلى النقطة F' بالمسمار الأول في المستوي ونجعل الطرف الآخر A للمسطرة حر الدوران في المستوي ونثبت بهذا الطرف الخيط والطرف الآخر للخيط نثبته بالمسمار إلى النقطة F الثابتة في المستوي والمختلفة عن F'

نشد الخيط بقلم إلى حافة المسطرة وندور المسطرة حول F' بحيث يبقى الخيط مشدوداً سيرسم رأس القلم P جزءاً من القطع الزائد

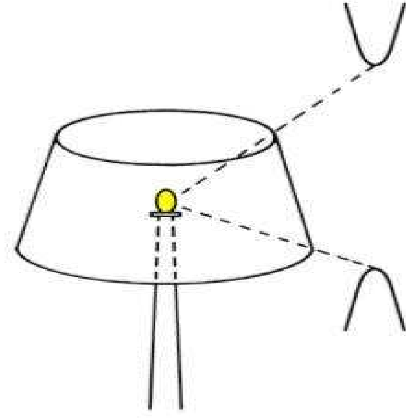
إذا كان طول المسطرة ℓ النقطة P تحقق

$$PF' - PF = \ell - AP - PF = \ell - (AF + PF) = \ell - h > 0$$

أي أن P تحقق تعريف القطع الزائد $PF' - PF = \ell - h = 2a$

بهذه الطريقة نرسم جزء من فرع القطع الزائد المتعلق بالمحرق F

ويمكننا رسم جزء من الفرع المتعلق بالمحرق F' بتثبيت طرف المسطرة في F وتثبيت طرفا الخيط في طرف المسطرة و F'





مداخن المصانع كمصانع الحديد على شكل مجسم قطع زائد

الأستاذ أحمد أبو نبوت

دراسة تحليلية لقطع محرقه $F(0,0)$ ودليله $,k \in \mathbb{R}^* \quad \Delta : x = \frac{k}{e}$

إذا فرضنا في المستوي المحدث بجملة قانونية أن $F(0,0)$ وأن $,k \in \mathbb{R}^* \quad \Delta : x = \frac{k}{e}$ و $M(x,y)$

وكانت N المسقط القائم للنقطة M على Δ فإن : $\frac{MF}{MN} = e$

أو $MF = e \cdot MN$ وتكافئ $\sqrt{x^2 + y^2} = e \cdot |x - \frac{k}{e}|$ تكافئ $x^2 + y^2 = |e \cdot x - k|^2$

ومنه $x^2 + y^2 = e^2 \cdot x^2 - 2k \cdot e \cdot x + k^2$

بالإصلاح $(1 - e^2)x^2 + 2k \cdot e \cdot x + y^2 = k^2$

أولاً : عندما $e \xrightarrow{>} 0$ نجد المعادلة $x^2 + y^2 = k^2$ والتي هي دائرة

إذا بدلنا في هذه المعادلة $(-x,-y)$ تتحقق المعادلة فالدائرة متناظرة بالنسبة إلى $F(0,0)$ نسميها مركز الدائرة ونسمي $r = |k|$ نصف قطرها

من ذلك يمكن إعطاء الدائرة تعريفاً خاصاً بها وهو

الدائرة : مجموعة نقط المستوي M التي بعدها عن نقطة ثابتة v (تسمى مركزالدائرة) يساوي عدداً موجباً تماماً (rيسمى نصف قطر الدائرة)

ملاحظة : إذا كان المنحني دائرة فإن الدليل $,k \in \mathbb{R}^* \quad \Delta : x = \frac{k}{e}$ هو عند آخر نقطة من المستوي

لأن $\lim_{e \xrightarrow{>} 0} \frac{|k|}{e} = +\infty$ أي عندما $e \xrightarrow{>} 0$ فإن $(x \to +\infty : k > 0)$ أو $(x \to -\infty : k < 0)$

ثانياً: عندما $e = 1$ نجد معادلته $y^2 = k^2 - 2k \cdot x$ أو $y^2 = -2k(x - \frac{k}{2})$

وهي معادلة قطع مكافئ محرقه $F(0,0)$ دليله $\Delta : x = k$

ثالثاً: $e\in]0,+\infty[\setminus\{1\}$ نكتب المعادلة

$$(1-e^2)\left(x^2+2\frac{k\cdot e}{1-e^2}\cdot x\right)+y^2=k^2$$

$$(1-e^2)\left[\left(x+\frac{k\cdot e}{1-e^2}\right)^2-\left(\frac{k\cdot e}{1-e^2}\right)^2\right]+y^2=k^2$$

$$(1-e^2)\left(x+\frac{k\cdot e}{1-e^2}\right)^2+y^2=k^2+\frac{k^2\cdot e^2}{1-e^2}$$

$$(1-e^2)\left(x+\frac{k\cdot e}{1-e^2}\right)^2+y^2=\frac{k^2}{1-e^2}$$

$$\frac{\left(x+\frac{k\cdot e}{1-e^2}\right)^2}{\frac{k^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\frac{k^2}{1-e^2}}=1$$

إذا فرضنا $\frac{r}{1-e^2}=\lambda$ نجد المعادلة

$$\frac{(x+e\cdot\lambda)^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{k\cdot\lambda}=1$$

لها حالتين :

$e\in]0,1[$ المعادلة نسمي قطع ناقص عندئذ $k\cdot\lambda>0$

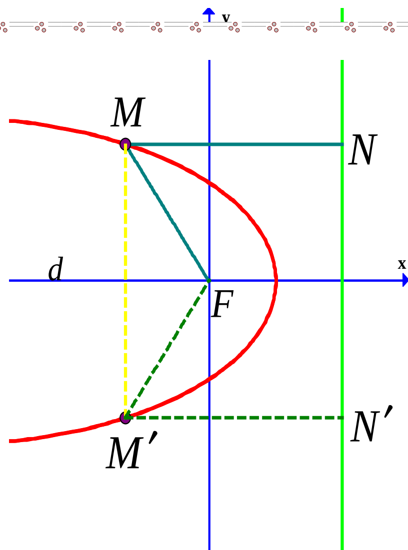
$e\in]1,+\infty[$ المعادلة نسمي قطع زائد عندئذ $k\cdot\lambda<0$

ملاحظات:

①في الشكل السابق للقطوع الثلاثة محرق مشترك $F(0,0)$ ودليل مشترك Δ

②المستقيم d المار من المحرق F

وعمود على الدليل Δ هو محور تناظر للقطع لأن التناظر يحافظ على المسافات



لكل نقطة M من القطع مسقطها على الدليل N

نظيرة بالنسبة إلى المستقيم d ولتكن M' و مسقطها

على الدليل N' التي هي نظيرة Nبالنسبة للمستقيم d

ويكون $FM = FM'$ و $NM = N'M'$

وبالتالي $\frac{FM}{NM} = \frac{FM'}{N'M'} = e$

فالنقطة M' تنتمي للقطع نسمي d المحور المحرقي (أو المحور الرئيسي)

③ القطع الناقص والقطع الزائد التي وجدنا معادلتيهما $\frac{(x+e\cdot\lambda)^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{k\cdot\lambda} = 1$

بالحل المشترك مع المحور المحرقي d الذي معادلته $y = 0$ نجد $\frac{(x+e\lambda)^2}{\lambda^2} = 1$

أو $(x+e\lambda)^2 = \lambda^2$ ومنه $x + e\lambda = \pm\lambda$

للمعادلة حلين $x = -\lambda(1+e)$ و $x = \lambda(1-e)$

نقط تقاطع القطع (الناقص أو الزائد) مع المحور المحرقي d هما

$A(\lambda(1-e),0)$, $A'(-\lambda(1+e),0)$

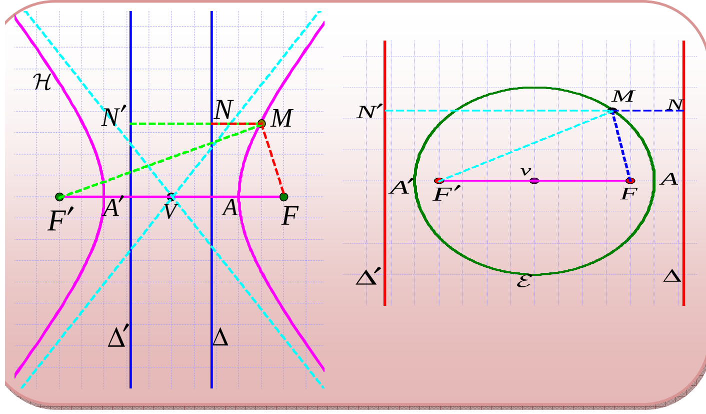
وهما رأسين للقطع والبعد بينهما $AA' = |-\lambda(1+e) - \lambda(1-e)| = 2|\lambda|$ ونسميه القطر المحرقي نرمز له $AA' = 2a$

④ للقطعين الزائد والناقص $\frac{(x+e\cdot\lambda)^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{k\cdot\lambda} = 1$ مركز تناظر هو $v(-e\lambda,0)$

لأنه إذا استبدلنا بالمعادلتين $M'(-2e\lambda - x, -y)$ بـ $M(x,y)$ لا تتغير معادلة القطع

أي أن $M'(-2e\lambda - x, -y)$ نظيرة $M(x,y)$ بالنسبة إلى $v(-e\lambda,0)$ تنتمي للقطع

⑤وجود مركز التناظر $v(-e\lambda,0)$ سيكون لكل قطع ناقص أو زائد محرق آخر ودليل آخر متعلق به



المحرق الآخر $F'(-2e\cdot\lambda,0)$

نظير $F(0,0)$ بالنسبة للمركز

والمسافة بين المحرقين $F'F=|2e\lambda|$

نرمز $F'F=2e|\lambda|=2c$ نسميه البعد المحرقي

والدليل الآخر المتعلق بالمحرق $F'(-2e\lambda,0)$ هو نظير للدليل $\Delta: x=\frac{k}{e}$ بالنسبة للمركز $v(-e\lambda,0)$

فمعادلته $\Delta': x=-2e\lambda-\frac{k}{e}$ ويتحقق عندئذ $\frac{F'M}{N'M}=e$ حيث N' مسقط M على الدليل Δ'

المسافة بين دليلي القطع : إذا لاحظنا أن $k=\lambda(1-e^2)$ نجد معادلتي الدليلين

$$\Delta: x=\frac{\lambda(1-e^2)}{e} \quad ، \quad \Delta': x=-\frac{\lambda(1+e^2)}{e}$$

$$|x_{\Delta}-x_{\Delta'}|=\left|\frac{\lambda(1-e^2)}{e}+\frac{\lambda(1+e^2)}{e}\right|=2\frac{|\lambda|}{e}$$

وجدنا أن طول القطر المحرقي $AA'=2|\lambda|=2a$ وأن البعد المحرقي $F'F=2e|\lambda|=2c$

يكون الاختلاف المركزي في القطع الزائد والناقص هو نسبة البعد المحرقي إلى طول القطر المحرقي أي $\frac{FF'}{AA'}=e$

⑥ في القطع الناقص $\frac{MF}{MN}=\frac{MF'}{MN'}=e$ وحسب خواص التناسب $\frac{MF+MF'}{MN+MN'}=e$

لكن حسبما ورد سابقاً المسافة بين الدليلين $MN+MN'=NN'=2\frac{|\lambda|}{e}$ نكتب $\frac{MF+MF'}{2\frac{|\lambda|}{e}}=e$

أي $MF+MF'=2|\lambda|$ هذه العلاقة تعطي تعريفاً جديداً للقطع الناقص وهو :

إذا كانت F' , F نقطتين ثابتتين من نقاط المستوي فإن القطع الناقص هو مجموعة نقط المستوي M التي مجموع بعديها عن F و F' يساوي عدداً موجباً تماماً $2|\lambda|$

❼ في القطع الزائد $e = \frac{MF}{MN} = \frac{MF'}{MN'}$ حسب خواص التناسب

$\frac{|MF - MF'|}{|MN - MN'|} = e$ لكن $|MN - MN'| = |NN'| = 2\frac{|\lambda|}{e}$ هو البعد بين الدليلين نستنتج

$|MF - MF'| = 2|\lambda|$ هذه العلاقة تعطي تعريفاً خاصاً للقطع الزائد وهو :

إذا كانت F' , F نقطتين ثابتتين من نقاط المستوي فإن القطع الزائد هو مجموعة نقط المستوي M التي فرق بعديها عن F و F' يساوي عدداً موجباً تماماً $2|\lambda|$

الفصل السابع

المعادلة العامة للقطع

تعريف :

لتكن F نقطة ثابتة من نقاط المستوي (κ) و Δ مستقيم ثابت في المستوي (κ) و Δ لا يمر من F

القطع هو مجموعة نقط المستوي لكل نقطة منها الخاصية :

(نسبة بعد ها عن F إلى بعدها عن Δ يساوي عدداً e و $e \in]0,+\infty[$)

المعادلة العامة للقطع:

ليكن محرق القطع $F(x_1,y_1)$ والدليل المتعلق بالمحرق $\Delta: ax+by+c=0$ والتباعد المركزي e

ولتكن $M(x,y)$ نقطة من هذا القطع فإن $\frac{MF}{L(M,\Delta)}=e$ (حسب تعريف القطع)

ومنه $\dfrac{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}{\dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}=e$

أو $\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=e|ax+by+c|$

بعملة تربيع للطرفين وإصلاح نجد معادلة لها الصيغة ✪...... $\boxed{Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+H=0}$

حيث A,B,C,D,E,H أعداد حقيقية و $(A,B,C)\neq(0,0,0)$

تسمى المعادلة ✪ **المعادلة العامة للقطع**

وقد وجدنا أن للقطع ميزات منها:

① أن للقطع محور تناظر مستقيم يمر من المحرق وعمود على الدليل (المحور الأساسي للقطع)

② للقطع المكافئ رأس هو نقطة تقاطع محور تناظر القطع مع القطع (للقطع المكافئ محور وحيد)

③ لكل قطع ناقص أو قطع زائد محوري تناظر

المحور الأساسي(المحور المحرقي) وهو مستقيم يمر بالمحرق وعمودي على الدليل ويقطع القطع في نقطتين كل منهما يسمى رأس القطع ومحور القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين محور تناظر آخر للقطع يسمى المحور الثانوي(اللا محرقي) ونقطة تقاطع المحورين المحرقي واللامحرقي هو مركز تناظر للقطع

④ لكل قطع ناقص أو قطع زائد محرقين متناظرين بالنسبة لمركز القطع

⑤ لكل قطع ناقص أو قطع زائد نرمز للبعد المحرقي $FF' = 2c$ والبعد بين الرأسين

$AA' = 2a$ فإن الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a}$

لاحظ أن الاختلاف المركزي للقطع نسبة البعد بين محرقي القطع إلى البعد بين رأسيه

⑥ في القطع الناقص المحور اللامحرقي يقطع القطع الناقص في نقطتين نسميهما القطبين

⑦ القطع الناقص منحني مغلق لأن كل مستقيم يمر من مركز القطع يقطعه في نقطتين ونسمي البعد بين نقطتي التقاطع قطر للقطع الناقص وهي أقطار مختلفة الأطوال أصغرها البعد بين القطبين

$BB' = 2b$ وأكبرها البعد بين الرأسين $AA' = 2a$ فإذا كان $FF' = 2c$ كان $a^2 = b^2 + c^2$

⑧ في القطع الزائد المحور اللامحرقي لا يقطع القطع فيكون للقطع الزائد فرعين

⑨ للقطع الزائد مستقيمين مقاربين يلتقيان في مركز القطع

وإذا كان لقطعين زائدين $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ نفس المستقيمين المقاربين نسمي $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ قطعين مترافقين

ويكون البعد بين محرقي القطع $\mathcal{H}_1$ مساوياً البعد بين محرقي القطع الزائد المرافق $\mathcal{H}_2$

⑩ نقول عن القطع الزائد إنه قطع زائد متساوي الساقين إذا تعامد مقاربيه

الأمثلة :

مثال 1 : أوجد المعادلة العامة لقطع المكافئ الذي محرقه $F(2,-1)$ ودليله $\Delta: x-2y+3=0$

واكتب معادلة محوره وأوجد إحداثيات الرأس

الحل: $\frac{MF}{L(M,\Delta)}=1$ ومنه $\frac{\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}}{\frac{|x-2y+3|}{\sqrt{4+1}}}=1$

نجري إصلاح $\sqrt{5}\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=|x-2y+3|$ بالتربيع

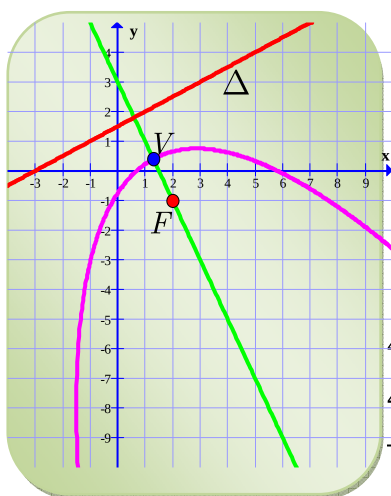
$$5x^2+5y^2-20x+10y+25=x^2+4y^2+9-4xy-12y+6x$$

$$4x^2+y^2+4xy-26x+22y+16=0$$

المحور يمر من المحرق $F(2,-1)$ وعمود على الدليل ميل الدليل $m=\frac{1}{2}$

يكون ميل المحور $m=-2$

وتكون معادلته $y+1=-2(x-2)$ أو $2x+y-3=0$



كي نوجد إحداثيات الرأس نحل جملة معادلة القطع ومحور القطع

$$\begin{cases} 4x^2+y^2-26x+22y+4xy+16=0 \;.....① \\ 2x+y-3=0 \;......② \end{cases}$$

من المعادلة ② نجد $y=-2x+3$ نبدل في ①

$$4x^2+(-2x+3)^2-26x+22(-2x+3)+4x(-2x+3)+16=0$$
$$4x^2+4x^2-12x+9-26x-44x+66-8x^2+12x+16=0$$
$$-70x+91=0$$
$$x=\frac{91}{70}$$

ومنه $y=\frac{14}{35}$ رأس القطع $V(\frac{91}{70},\frac{14}{35})$

مثال ②: أوجد معادلة القطع الناقص الذي محرقه $F(0,-1)$ ودليله $\Delta: x-y-3=0$ وتباعده المركزي

$e=\frac{1}{\sqrt{2}}$ واكتب معادلة محوره المحرقي وأوجد إحداثيات رأسيه وأثبت أنه متناظر بالنسبة للنقطة

V منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين وأوجد المحرق الآخر وأوجد معادلة المحور

اللامحرقي وإحداثيات القطبين ومعادلة الدليل المتعلق بالمحرق F'

الحل: $\frac{MF}{L(M,\Delta)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ومنه $\frac{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}{\frac{|x-y-3|}{\sqrt{1+1}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

نجري إصلاح $2\sqrt{x^2+(y+1)^2}=|x-y-3|$ بالتربيع

$$4x^2+4y^2+8y+4=x^2+y^2+9-2xy+6y-6x$$

$$3x^2+3y^2+2xy+6x+2y-5=0$$

المحور الرئيسي يمر من المحرق $F(0,-1)$ وعمود على الدليل بما أن ميل الدليل $m=1$

يكون ميل المحور الرئيسي $m=-1$ تكون معادلته $y+1=(-1)(x-0)$ أو $y=-x-1$

كي نوجد إحداثيات الرأس نحل جملة معادلة القطع ومحوره المحرقي

$$\begin{cases}3x^2+3y^2+2xy+6x+2y-5=0....① \\ y=-x-1 ......②\end{cases}$$ نبدل ② في ① نجد

$$3x^2+3(-x-1)^2+2x(-x-1)+6x+2(-x-1)-5=0$$

ومنه $x^2+2x-1=0$ مميزها $\Delta=8$ وحلولها $x_2=-1-\sqrt{2}$, $x_1=-1+\sqrt{2}$

بالتعويض في ② نجد $y_2=\sqrt{2}$, $y_1=-\sqrt{2}$

الرأسان $A(-1+\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $A'(-1-\sqrt{2},\sqrt{2})$

منتصف $[AA']$ هي $V(\frac{x_A+x_{A'}}{2},\frac{y_A+y_{A'}}{2})=(-1,0)$

لبرهان أنها مركز تناظر بالنسبة للقطع نبدل في معادلته $3x^2+3y^2+2xy+6x+2y-5=0$

كل $M'(2x_0-x,2y_0-y)$ أي $M'(-2-x,-y)$ بـ $M(x,y)$ نجد

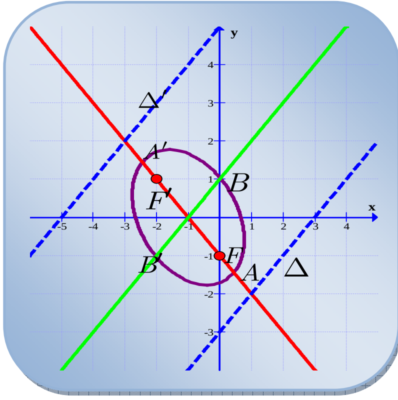
$$3(-2-x)^2+3(-y)^2+2(-2-x)(-y)+6(-2-x)+2(-y)-5=0$$

بالإصلاح نجد $3x^2+3y^2+2xy+6x+2y-5=0$

وهي نفس معادلة القطع فهو متناظر بالنسبة إلى $V(-1,0)$ منتصف $[AA']$

المحرق الآخر هو نظير المحرق $F(0,-1)$ بالنسبة إلى $V(-1,0)$

فهو $F'(2x_0-x_F,2y_0-y_F)$ أي $F'(-2-0,0+1)=(-2,1)$



المحور اللامحرقي عمود على المحور المحرقي ويمر من المركز

ميله $m=1$ ويمر من $V(-1,0)$

فمعادلته $y-0=x+1$ أو $y=x+1$ كي نوجد إحداثيات القطبين

نحل جملة معادلة القطع ومحوره اللامحرقي

$$\begin{cases}3x^2+3y^2+2xy+6x+2y-5=0....① \\ y=x+1 \;......②\end{cases}$$

نبدل ② في ① نجد $3x^2+3(x+1)^2+2x(x+1)+6x+2(x+1)-5=0$

ومنه $8x^2+16x=0$ أي $x_1=0$, $x_2=-2$ ومنه

$y_1=1$, $y_2=-1$ القطبان $B(0,1)$, $B'(-2,-1)$

الدليل المتعلق بالمحرق F' هو نظير الدليل $\Delta: x-y-3=0$ بالنسبة للمركز $V(-1,0)$

نبدل $(2x_0-x,2y_0-y)$ بـ (x,y) أي نبدل $(-2-x,-y)$ في معادلة Δ

نجد الدليل الآخر $\Delta': y=x+5$

مثال ③ : أوجد معادلة القطع الزائد الذي محرقه $F(-1,2)$ ودليله $\Delta: x-2y-1=0$ وتباعده المركزي $e=2$ واكتب معادلة محوره المحرقي وأوجد إحداثيات رأسيه وإحداثيات محرقه الآخر ومعادلة محوره اللامحرقي وأوجد معادلتي مقاربيه

الحل: $\frac{MF}{L(M,\Delta)}=2$ ومنه $\frac{\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}}{\frac{|x-2y-1|}{\sqrt{1+4}}}=2$

نجري إصلاح $\sqrt{5}\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=2|x-2y-1|$ بالتربيع

$$5x^2+5y^2+10x-20y+25=4x^2+16y^2+4-16xy+16y-8x$$

$$x^2-11y^2+18x-36y+16xy+21=0$$

المحور المحرقي يمر من المحرق $F(-1,2)$ وعمودي على الدليل وميل الدليل $m=\frac{1}{2}$

ومنه ميل المحور المحرقي $m=-2$ تكون معادلته $y-2=(-2)(x+1)$ أو $y=-2x$

كي نوجد إحداثيات الرأس نحل جملة معادلة القطع ومحور القطع

$\begin{cases} x^2-11y^2+18x-36y+16xy+21=0....① \\ y=-2x \quad ......② \end{cases}$ نبدل ② في ①

$$x^2-44x^2+18x+72x-32x^2+21=0$$

ومنه $75x^2-90x-21=0$ أو $25x^2-30x-7=0$

$$\begin{cases} \Delta=b^2-4ac=(30)^2-4(25)(-7)=900+700=1600 \\ x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{30-40}{50}=-\frac{1}{5} \ , \ y_1=\frac{2}{5} \\ x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{30+40}{50}=\frac{7}{5} \ , \ y_2=-\frac{14}{5} \end{cases}$$

الرأسان $A\left(-\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right),\ A'\left(\frac{7}{5},-\frac{14}{5}\right)$

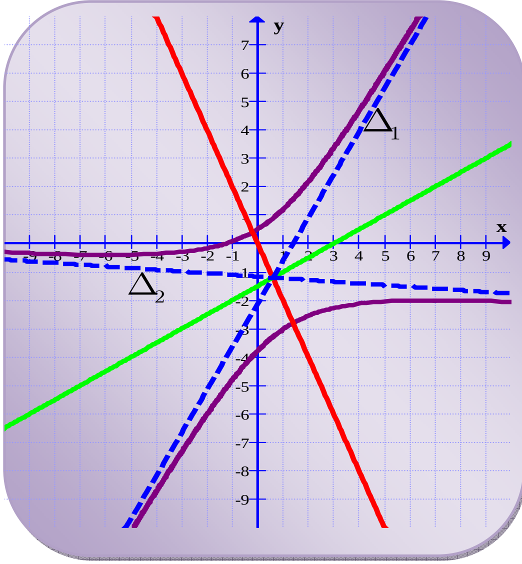
المركز منتصف $[AA']$ وهو $V\left(\frac{x_A+x_{A'}}{2},\frac{y_A+y_{A'}}{2}\right)=\left(\frac{3}{5},-\frac{6}{5}\right)$

المحرق الآخر هو نظير المحرق $F(-1,2)$ بالنسبة إلى $V(\frac{3}{5},-\frac{6}{5})$

فهو $F'(2x_0-x_F,2y_0-y_F)$ أي $F'(\frac{6}{5}+1,-\frac{12}{5}-2)=(\frac{11}{5},\frac{2}{5})$

معادلة المحور اللامحرقي يمر من المركز $V(\frac{3}{5},-\frac{6}{5})$ ويوازي الدليل يكون ميله $m=\frac{1}{2}$

ومعادلته $y+\frac{6}{5}=\frac{1}{2}(x-\frac{3}{5})$ ومنه $10y+12=5x-3$ أو $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$



كي نوجد المقاربين نكمل لمربعين كاملين كما يلي:

$$x^2+18x+16xy-11y^2-36y+21=0$$
$$(x+9+8y)^2-(9+8y)^2-11y^2-36y+21=0$$
$$(x+9+8y)^2-81-1447-64y^2-11y^2-36y+21=0$$
$$(x+9+8y)^2-75y^2-180y+60=0$$
$$(x+9+8y)^2-75(y^2+\frac{12}{5}y)+60=0$$
$$(x+9+8y)^2-75(y+\frac{6}{5})^2+206=0$$
$$75(y+\frac{6}{5})^2-(x+9+8y)^2=206$$

نضع $\lim_{x\to\pm\infty}\left[75(y+\frac{6}{5})^2-(x+9+8y)^2\right]=0$ ومنه المقاربان $75(y+\frac{6}{5})^2-(x+9+8y)^2=0$

أو $5\sqrt{3}(y+\frac{6}{5})=\pm(x+9+8y)$

إما $\left(5\sqrt{3}-8\right)y=x+9-6\sqrt{3}$ ومنه $\Delta_1:y=\frac{1}{\left(5\sqrt{3}-8\right)}\left(x+9-6\sqrt{3}\right)$

أو $\left(5\sqrt{3}-8\right)y=-x-9+6\sqrt{3}$ ومنه $\Delta_2:y=-\frac{1}{\left(5\sqrt{3}+8\right)}\left(x+9+6\sqrt{3}\right)$

تمارين :

في كل مما يلي بين نوع القطع وأوجد معادلته وفي حالة القطع الناقص أو الزائد عين المحرق الآخر والدليل الآخر

❶ محرقه $F(3,2)$ ودليله $\Delta : 4x = 21$ وتباعده المركزي $e = \frac{4}{5}$

❷ محرقه $F(2,1)$ ودليله $\Delta : 5y = 21$ وتباعده المركزي $e = \frac{5}{4}$

❸ محرقه $F(3,-2)$ ودليله $\Delta : y = 4$ وتباعده المركزي $e = 1$

الحل:

❶ $e = \frac{4}{5} < 1$ القطع ناقص $\frac{MF}{L(M,\Delta)} = \frac{4}{5}$ ومنه $\frac{\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}}{\frac{|4x-21|}{4}} = \frac{4}{5}$

نجري إصلاح $5\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = |4x-21|$ بالتربيع

$$25x^2 - 150x + 225 + 25(y-2)^2 = 16x^2 - 168x + 441$$

$$9x^2 + 18x + 25(y-2)^2 = 216$$

$$9(x+1)^2 - 9 + 25(y-2)^2 = 216$$

$9(x+1)^2 + 25(y-2)^2 = 225$ أو $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

قطع ناقص مركزه $v(-1,2)$

محرقه الآخر نظير المحرق المفروض بالنسبة للمركز حسب دساتير التناظر

$$x' = 2x_0 - x \ \ , \ y' = 2y_0 - y$$

المحرق $F'(2x_0 - x_F, 2y_0 - y_F)$ أو $F'(-5,2)$

الدليل الآخر $x'=2x_0-x$ ومنه $x'=2x_0-x$ يكون $x=2x_0-x'=-2-x'$

نعوض بالدليل $\Delta:4x=21$ نجد $\Delta':4(-2-x')=21$ أي $\Delta':4x+29=0$

❷ محرقه $F(2,4)$ ودليله $\Delta:5y=11$ وتباعده المركزي $e=\frac{5}{4}$

$e=\frac{5}{4}>1$ القطع زائد $\frac{MF}{L(M,\Delta)}=\frac{5}{4}$ ومنه $\frac{\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}}{\frac{|5y-11|}{5}}=\frac{5}{4}$

نجري إصلاح $4\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=|5y-11|$ بالتربيع

$$16(x-3)^2+16y^2-128y+256=25y^2-110y+121$$

$16(x-2)^2-9y^2-18y+135=0$ ومنه $16(x-2)^2-9(y+1)^2+144=0$

$9(y+1)^2-16(x-2)^2=144$ أو $\frac{(y+1)^2}{16}-\frac{(x-2)^2}{9}=1$

قطع زائد مركزه $V(2,-1)$ محرقه الآخر نظير المحرق المفروض بالنسبة للمركز

حسب دساتير التناظر $x'=2x_0-x \ , \ y'=2y_0-y$

المحرق $F'(2x_0-x_F,2y_0-y_F)$ أو $F'(2,-6)$

الدليل الآخر $y'=2y_0-y$ ومنه $y'=2y_0-y$ يكون $y=2y_0-y'=-2-x'$

نعوض بالدليل $\Delta:5y=11$ نجد $\Delta':5(-2-y')=11$ أي $\Delta':5y+21=0$

❸ محرقه $F(3,-2)$ ودليله $\Delta:y=4$ وتباعده المركزي $e=1$

$e=1$ القطع مكافئ $MF=\ell(M,\Delta)$ $\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}=|y-4|$ بالتربيع

$$(x-3)^2+y^2+4y+4=y^2-8y+16$$
$$(x-3)^2=-12(y-1)$$

القطع قطع مكافئ ليس له مركز ولا دليل آخر ولا محرق آخر

الفصل الثامن: الدّائرة

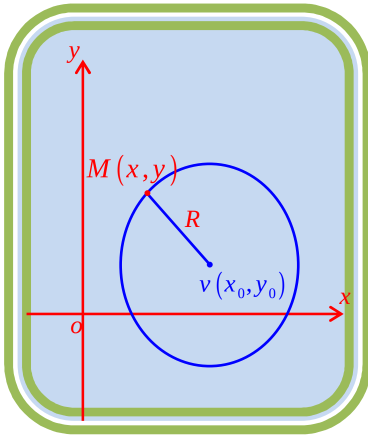
تعريف:

الدّائرة : إذا كانت v نقطة ثابتة في المستوي فالدّائرة هي مجموعة النقط M من المستوي والتي بعد كل منها عن النقطة الثّابتة v يساوي طولاً ثابتاً R.

★نُسمِّي النّقطة الثّابتة v مركز الدّائرة والطول الثّابت R نصف قُطر الدّائرة $(R > 0)$.

★نرمز لخط الدّائرة بالرمز C : $M \in C \Leftrightarrow vM = R$

معادلة الدّائرة:



لتكن النقطة (x_o, y_o) v مركزاً لدائرة نصف قطرها R

ولتكن $M(x, y)$ نقطة من الدّائرة فيكون:

وهذا يكافئ: $OM = R \Leftrightarrow \overline{OM}^2 = R^2$

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$$

نُسمِّي هذه المعادلة الصّيغة القياسيّة لمعادلة دائرة

مثال: المعادلة: $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$ تُمثِّل دائرة مركزها $v(1,-3)$، نصف قُطرها $R = 2$

مثال آخر :

اكتب معادلة دائرة مركزها $v(-2,-5)$ ونصف قُطرها $R = 5$

الصّيغة القياسيّة معادلة الدّائرة $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$

بتعويض الفرضيات نجد $(x+2)^2 + (y+5)^2 = 25$

حالة خاصّة: إذا كان مركز الدّائرة منطبقاً على مبدأ الإحداثيّات $O(0,0)$ ونصف قُطرها R فإنّ معادلتها هي: $x^2+y^2=R^2$ ونُسمّيها الصّيغة المختزلة لمعادلة الدّائرة.

الصِّيغة العّامة لمعادلة دائرة:

بنشر الأقواس في المعادلة $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=R^2$ نجد أنّ:

$$x^2-2x_ox+x_0^2+y^2-2y_oy+y_0^2-R^2=0$$
$$x^2+y^2-2x_ox-2y_oy+x_0^2+y_0^2-R^2=0$$

نضع: $a=-2x_o$ ومنه $x_o=-\frac{a}{2}$ وكذلك نضع $b=-2y_o$ يكون $y_o=-\frac{b}{2}$

كذلك نضع $c=x_0^2+y_0^2-R^2$ ومنه $R^2=x_o{}^2+y_0^2-c$

ومنه: $x^2+y^2+ax+by+c=0$ نُسمّي المعادلة الصِّيغة العامة لمعادلة الدّائرة.

ملاحظة: مناقشة المعادلة $x^2+y^2+ax+by+c=0$

كلُّ معادلةٍ من هذه الصِّيغة يمكن كتابتها بعد الإتمام إلى مربعيّن كامليّن بالشّكل:

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$ نميّز ثلاث حالات:

1) إذا كان $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c>0$: فالمعادلة تمثّل دائرة مركزها $v\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$

ونصف قُطرها $R=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$ أو $R=\sqrt{x_0^2+y_0^2-c}$

2) إذا كان $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c=0$: فالمعادلة تمثّل نُقطة وَحيدة $v\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$

فهي مجموعة وحيدة العنصر $\left\{\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)\right\}$

3) إذا كان $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c<0$: فالمعادلة تمثّل مجموعة خالية.

مثال:

لتكن الدّائرة $C: \quad x^2+y^2+4x-6y-3=0$ عيّن مركزها ونصف قُطرها.

الحل:

طريقة(1):

$$x^2+y^2+4x-6y-3=0$$
$$\left(x^2+4x\right)+\left(y^2-6y\right)=3$$

$$(x+2)^2-2^2+(y-3)^2-3^2=3 \quad \text{ومنه} \quad (x+2)^2+(y-3)^2=16$$

وبالمقارنة مع الشّكل النّموذجي لمعادلة الدّائرة نجد أنّ:مركز الدّائرة $v(-2,3)$ ونصف قُطرها $R=4$.

طريقة(2): من الشّكل العام لمعادلة الدّائرة نجد أنّ:

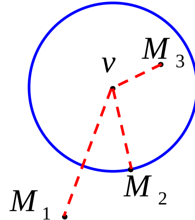
$$\left.\begin{array}{l} x_o=-\dfrac{a}{2}=-2 \\ y_o=-\dfrac{b}{2}=3 \end{array}\right\} \quad \text{يكون مركز الدّائرة} \quad v(-2,3)$$

$$R=\sqrt{x_0^2+y_0^2-c}=\sqrt{(-2)^2+(3)^2-(-3)}$$

$$R=\sqrt{4+9+3}=\sqrt{16}=4$$

وضع نقطة بالنّسبة لدائرة:

لتكن الدّائرة C ، M_i نقطة من المستوي ولتعيين وضعها بالنّسبة للدّائرة نميّز الحالات الآتية:



1- M_1 نقطة خارج الدّائرة يكافئ $vM_1>R$

2- M_2 تنتمي إلى الدّائرة يكافئ $vM_2=R$

3- M_3 نقطة داخل الدّائرة يكافئ $vM_3<R$

مثال:

لتكن الدّائرة C المُعيّنة بالمعادلة: $x^2+y^2-6x-8y=0$

عيّن وضع كلٍّ من النّقطتين $A(1,1)$ و $B(2,-3)$ بالنّسبة إلى الدّائرة C.

الحل:

$$(x_o,y_o)=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)=(3,4)$$

إذن: مركز الدّائرة $(3,4)$ v وأنّ:

نصف قُطر الدّائرة: $R=\sqrt{x_0^2+y_0^2-c}$

$$R=\sqrt{(3)^2+(4)^2-0}=5$$

بعد A عن مركز الدّائرة هو: $vA=\sqrt{(1-3)^2+(1-4)^2}$

$$vA=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}<5$$

أي أنّ: $vA<R$ إذن A داخل الدّائرة.

كذلك نجد أنّ: $vB=\sqrt{(2-3)^2+(-3-4)^2}$

$$vB=\sqrt{1+49}=\sqrt{50}$$

ولكنّ $\sqrt{50}>5$ أي $vB>R$

إذن B خارج الدّائرة.

قوة نقطة بالنسبة للدائرة :

نعرّف قوة النّقطة M بالنسبة للدّائرة C التي مركزها v ونصف قُطرها R بأنّه العدد الحقيقي

$F(M)=\overline{vM}^2-R^2$ أي $F(x,y)=(x-x_o)^2+(y-y_o)^2-R^2$

إذا كانت معادلة الدّائرة $x^2+y^2+ax+by+c=0$

فإن $F(x,y)=x^2+y^2+ax+by+c$

نستنتج : أنّه لدراسة الوضع النّسبي لنقطة $M(x_1,y_1)$ مع دائرة نحسب قوة النّقطة بالنّسبة إلى الدّائرة $F(x_1,y_1)=x_1^2+y_1^2+ax_1+by_1+c$ نُميّز الحالات الآتية:

$F(x_1,y_1)>0$ النقطة $M(x_1,y_1)$ تقع خارج الدائرة

$F(x_1,y_1)<0$ النقطة $M(x_1,y_1)$ تقع داخل الدائرة

$F(x_1,y_1)=0$ النقطة $M(x_1,y_1)$ تقع على الدائرة(تنتمي للدائرة)

مثال 1 :

لتكن الدّائرة C المُعيّنة بالمعادلة: $2x^2+2y^2-6x+y=20$

عيّن وضع كل من النّقاط $A(1,2)$ و $B(-2,2)$ و $D(5,0)$ بالنّسبة إلى الدّائرة C.

الحل: $F(x,y)=x^2+y^2+ax+by+c$

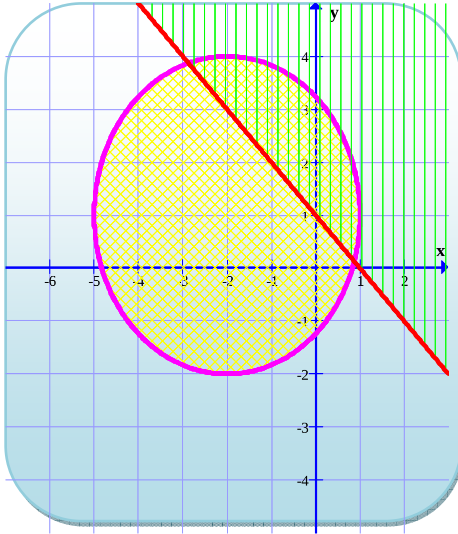
نكتب معالة الدائرة $x^2+y^2-3x+\frac{1}{2}y=10$ يكون $F(x,y)=x^2+y^2-3x+\frac{1}{2}y-10$

$F(1,2)=1+4-3+1-10=-7<0$ ، النّقطة $A(1,2)$ تقع داخل الدّائرة C

$F(-2,2)=(-2)^2+(2)^2-3(-2)+\frac{1}{2}(2)-10=5>0$ ، النقطة $B(-2,2)$ تقع خارج الدّائرة C

$F(5,0)=(5)^2+(0)^2-3(5)+(0)-10=0$ ، النقطة $D(5,0)$ تقع على الدّائرة C

مثال 2 حل بيانياً المتراجحتين جملة المتراجحتين	$\begin{cases}(x+2)^2+(y-1)^2<9 \\ x+y>1\end{cases}$



الحل: قوة النقطة بالنسبة للدائرة $(x+2)^2+(y-1)^2=9$

هو $F(x,y)=(x+2)^2+(y-1)^2-9$

المتراجحة الأولى $F(x,y)<0$ فهي محققة للنقاط داخل الدائرة

وفي المتراجحة الثانية إذا عوضنا النقطة $(0,0)$ نجدها غير محققة

حل المتراجحة الثانية هي النقاط الواقعة فوق المستقيم

الحل المشترك للمتراجحتين هو القطعة الدائرية

الملونة باللونين البرتقالي والأخضر عدا نقاط محيط هذه القطعة

ملاحظه: المستقيم المماس لدائرة عمود على

حامل قُطرها المار من نقطة التّماس

من المثلّث القائم vMA وحسب مبرهنة فيثاغورث نكتب

$\overline{MA}^2=\overline{vM}^2-\overline{vA}^2$ أو $\overline{MA}^2=\overline{vM}^2-R^2$

وحسب تعريف قوّة نقطة بالنّسبة لدائرة $F(M)=\overline{vM}^2-R^2$

إذاً $F(M)=\overline{AM}^2$ ومنه طول قِطعة المماس الواصِلة بين النّقطة ونقطة التّماس $\ell=\sqrt{F(M)}=AM$

نتيجة : إذا كانت النّقطة تقع خارج الدّائرة فإن قوة النّقطة بالنّسبة للدّائرة يساوي مربّع طول قطعة المماس الواصلة بين النّقطة ونقطة التّماس

مثال : لتكن الدّائرة C المُعيّنة بالمعادلة: $x^2+y^2-4x+2y=20$

تأكّد أن النّقطة $M(-6,5)$ تقع خارج الدّائرة وأوجد طُول قِطعة المماس بين هذه النّقطة ونقطة التّماس

الحل:

قوّة النّقطة $F(x,y)=x^2+y^2-4x+2y-20$

$F(-6,5)=36+25+24+10-20=75>0$

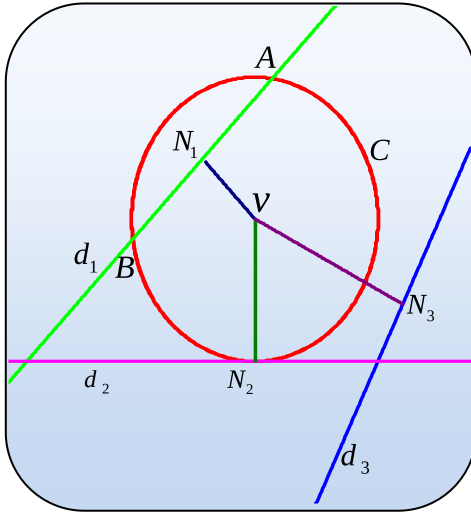
النّقطة تقع خارج الدّائرة

وطول قِطعة المماس $\ell=\sqrt{F(M)}=5\sqrt{3}$

وضع مستقيم بالنّسبة إلى دائرة:

ليكن المستقيم: $d: \quad a_1x+b_1y+c_1=0$

والدّائرة: $C: \quad x^2+y^2+ax+by+c=0$



واقعين في مستوٍ واحد ، نحسب بعد مركز الدّائرة عن المستقيم:

① $vN_3>R$

(فإن d_3 لا يشترك مع الدّائرة بأيّة نقطة المستقيم لا يقطع الدّائرة)

② $vN_2=R$

(فإن d_2 يشترك مع الدّائرة بنقطة وحيدة نسمّيه مماس للدّائرة)

③ $vN_1<R$

(فإن d_1 يشترك مع الدّائرة بنقطتين A,B المستقيم يقطع الدّائرة بنقطتين)

مثال:

ادرس الوضع النّسبي للمستقيم d الذي معادلته: $x+y-3=0$

والدّائرة: $C: \quad x^2+y^2+2x-2y-7=0$ ثُمّ عيّن النّقاط المشتركة إن وجدت.

الحل:

نكتب معادلة الدّائرة بالشّكل النّموذجي وذلك بالإتمام إلى مُربّعين كاملين:

$$C: \quad x^2+2x+1+y^2-2y+1=7+1+1$$
$$(x+1)^2+(y-1)^2=9$$

مركز الدّائرة $v\ (-1,1)$ ونصف قطرها $R=3$ بعد مركز الدّائرة عن المستقيم d:

$$\ell=\frac{|-1+1-3|}{\sqrt{1+1}}=\frac{3}{\sqrt{2}}<3$$

أي أنّ: $\ell<R$ فالمستقيم d قاطع للدّائرة C بنقطتين مختلفتين

بالحل المشترك لجملة المعادلتين

$$d: \ y=-x+3 \qquad ...①$$
$$C: \ x^2+y^2+2x-2y-7=0 \qquad ...②$$

نُعوِّض المعادلة ① في ② نجد:

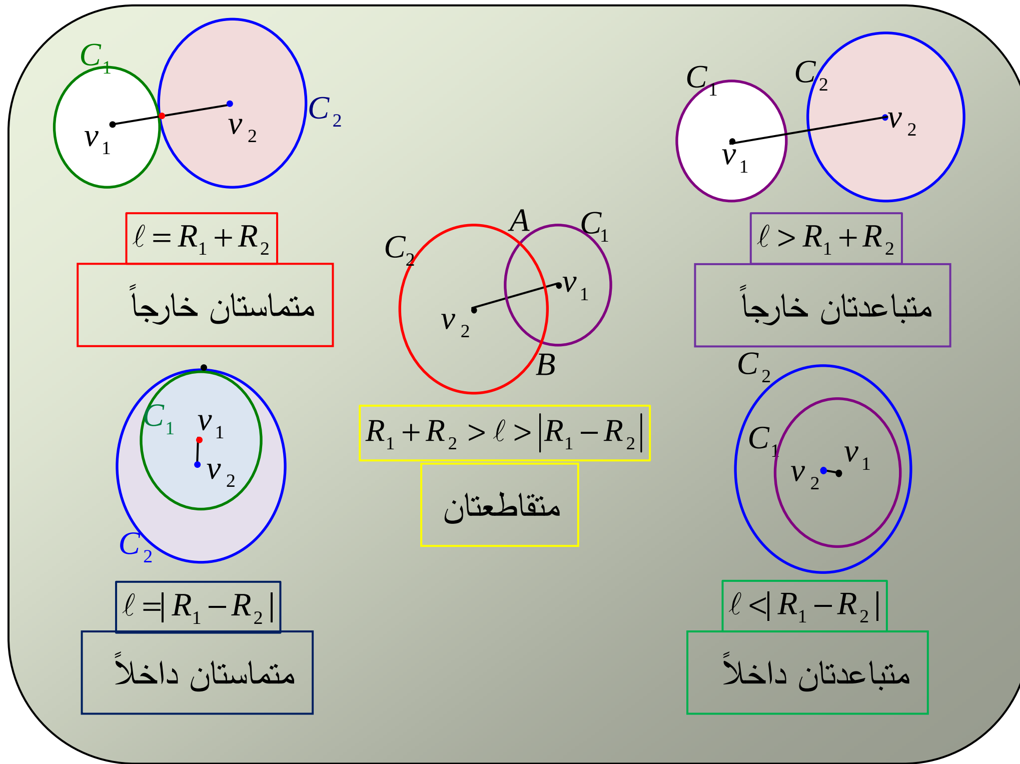
$$x^2+(-x+3)^2+2x-2(-x+3)-7=0$$
$$x^2+x^2-6x+9+2x+2x-6-7=0$$
$$x^2-x-2=0$$
$$(x-2)(x+1)=0$$

$x=2$ ومنه: $y=1$ أو $x=-1$ ومنه: $y=4$

ومنه $M_1(-1,4)$ و $M_2(2,1)$ نقطتا تقاطع المستقيم d مع C.

الأوضاع المختلفة لدائرتين:

يمكن معرفة الوضع النّسبي لدائرتين بمقارنة البُعد بين مركزي الدّائرتين $\ell = v_1 v_2$ مع مجموع وفرق نصفي قطري الدّائرتين R_1 , R_2



$R_1 + R_2 > \ell > |R_1 - R_2| \Leftrightarrow$ C_1 , C_2 دائرتان متقاطعتان بنقطتين.

$\ell = R_1 + R_2 \Leftrightarrow$ C_1 , C_2 دائرتان متماسّتان خارجاً.

$\ell = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow$ C_1 , C_2 دائرتان متماسّتان داخلاً.

$\ell > R_1 + R_2 \Leftrightarrow$ C_1 , C_2 دائرتان متباعدتان خارجاً.

$\ell < |R_1 - R_2| \Leftrightarrow$ C_1 , C_2 دائرتان متباعدتان داخلاً

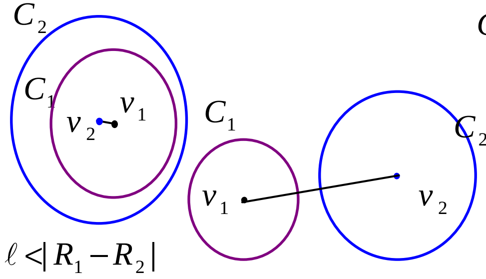
النقط المشتركة لدائرتين

ليكن C_1 , C_2 معادلتي دائرتين وللحصول على النّقط المشتّركة بين الدّائرتين نبحث عن الحل المشّترك لجملة معادلتيهما:

1) (C_1 , C_2 دائرتان متباعدتان داخلاً أو خارجاً) $\Leftrightarrow$ $C_1 \cap C_2 = \varnothing$

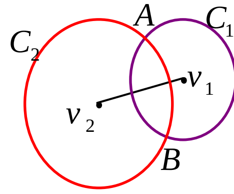
2) (C_1 , C_2 دائرتان متماسّتان) $\Leftrightarrow$ $C_1 \cap C_2 = \{A\}$

نُسمِّي A نقطة التّماس.



3) (C_1 , C_2 دائرتان متقاطعتان) $\Leftrightarrow$ $C_1 \cap C_2 = \{A,B\}$ $\ell > R_1 + R_2$

نُسمِّي B , A نقطتي التقاطع.



$R_1 + R_2 > \ell > |R_1 - R_2|$

مثال:.

برهن أنّ الدائرتين $C_1: \quad x^2 + y^2 - 16x - 20y + 115 = 0$

$C_2: \quad x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$

متماستان خارجاً ثم أوجد نقطة التماس

الحل:

نبحث عن مركز ونصف قطر كل من الدائرتين C_1 , C_2

مركز الدّائرة الأوّلى: $v_1(8,10)$, $\left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{-a}{2} = 8 \\ y_1 = \frac{-b}{2} = 10 \end{array}\right\}$ $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - c}$

نصف قطرها: $R_1 = \sqrt{64 + 100 - 115} = 7$

مركز الدّائرة الثّانية: $v_2(-4,5)$, $\left.\begin{array}{l} x_2 = -4 \\ y_2 = 5 \end{array}\right\}$ نصف قطرها:

$R_2 = \sqrt{16 + 25 - 5} = 6$

$$v_1v_2 = \sqrt{(12)^2 + (5)^2} = 13$$

نلاحظ أن: $v_1v_2 = R_1 + R_2$ فالدائرتان متماسّتان خارجاً.

ولتعيين نقطة التّماس

بالحل المشترك لمعادلتي الدّائرتين

$$x^2 + y^2 - 16x - 20y + 115 = 0 ....(1)$$

$$x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0 ....(2)$$

بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) نجد المعادلة $-24x - 10y + 110 = 0$ ومنه

$$y = -\frac{12}{5}x + 11 ....(3)$$

نبدل في المعادلة (2) نجد $x^2 + \left(-\frac{12}{5}x + 11\right)^2 + 8x - 10\left(-\frac{12}{5}x + 11\right) + 5 = 0$

$$x^2 + \frac{144}{25}x^2 - \frac{264}{5}x + 121 + 8x + 24x - 110 + 5 = 0$$

$$\frac{169}{25}x^2 - \frac{104}{5}x + 16 = 0 \quad ، \quad \left(\frac{13}{5}x - 4\right)^2 = 0$$

ومنه $x = \frac{20}{13}$ نبدل في (3) نجد $y = -\frac{12}{5}\frac{20}{13} + 11 = \frac{95}{13}$ نقطة التماس $A\left(\frac{20}{13}, \frac{95}{13}\right)$

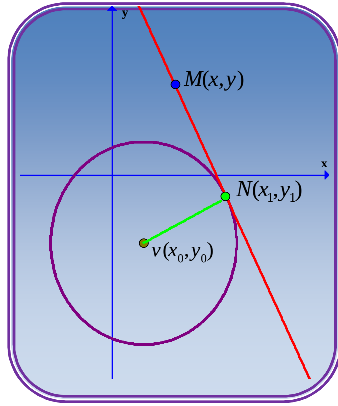
معادلة المماس لدائرة: المستقيم المماس لدائرة هو كل مستقيم يشترك مع الدائرة بنقطة وحيدة

1 **معادلة مماس لدائرة في نقطة منها:**

بعد التّأكد من أنّ النّقطة المعلومة تنتمي إلى الدّائرة يمكننا إيجاد معادلة المماس بطريقتين.

أ) بالاعتماد على خاصّة تعامد المماس لدائرة في نقطة التّماس N مع نصف القطر vN حيث v مركز الدّائرة:

إذا كانت $N\,(x_1, y_1)$ نقطة من الدّائرة C



وبفرض $M\,(x\,,y\,)$ نقطة ما من المماس للدّائرة

في النّقطة N كان $\overrightarrow{vN}\cdot\overrightarrow{NM}=0$ حيث

$\overrightarrow{vN}\,(x_1-x_o\,,y_1-y_o) \quad , \quad \overrightarrow{NM}\,(x-x_1,y-y_1)$

ومنه نجد:

$$(x_1-x_o)(x-x_1)+(y_1-y_o)(y-y_1)=0$$

وهي معادلة المماس للدّائرة C في نقطة معلومة منها N

مثال:

تحقق أن النّقطة $N\,(1,2)$ تقع على الدّائرة C ثم أوجد معادلة المماس للدّائرة:

$C: x^2+y^2-8x+4y-5=0$ في النّقطة N.

الحل:

نتحقّق من أنّ M تنتمي إلى الدّائرة C وذلك بتعويض إحداثييها في معادلة الدّائرة:

فنجد: $F(N)=(1)^2+(2)^2-8(1)+4(2)-5$

$F(N)=1+4-\cancel{8}+\cancel{8}-5=0$

وبالتالي: $N\ (1,2)$ تنتمي للدّائرة C.

مركز الدّائرة: $\left.\begin{array}{l} x_o=\dfrac{-a}{2}=4 \\ y_o=\dfrac{-b}{2}=-2 \end{array}\right)$ ومنه $v\ (4,-2)$

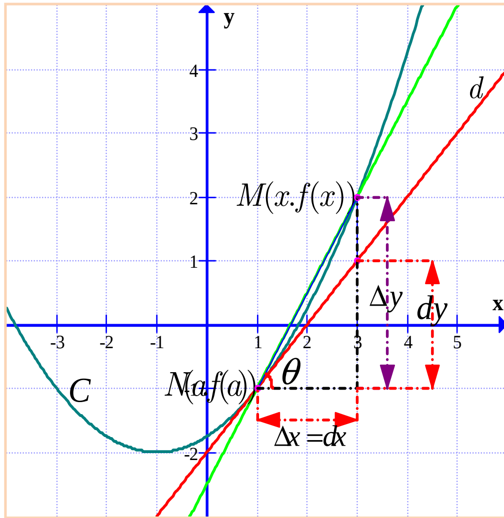
نُعوّض في معادلة المماس للدّائرة نجد: $(1-4)(x-1)+(2+2)(y-2)=0$

بالإصلاح نجد: $3x-4y+5=0$ وهي معادلة المماس المطلوبة.

II) بالاعتماد على المشتقّ

يمكن حساب ميل المماس بالاعتماد على المعنى الهندسي

لمشتق الدالة إذ أن إذا كانت الدالة f اشتقاقية في جوا للعدد a



$$m=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

أو $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ و $f'(a)=m$

ميل المماس عند النقطة $N\ (a,f\ (a))$ هو

$m=f'(a)$ ومعادلة المماس عند $N\ (a,f\ (a))$ هو

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

سنرمز $y'_x=\dfrac{dy}{dx}$ وميل المماس عند $N\ (a,f\ (a))$ سيكون $m=y'_a$

مثال(1):

لو عدنا إلى المثال السّابق: $C:\quad x^2+y^2-8x+4y-5=0$

والنّقطة $N\ (1\ ,\ 2)$ تنتمي إلى C نشتق معادلة الدّائرة بالنّسبة إلى x فنجد:

$2x+2yy'_x-8+4y'_x=0$ نعلم أن $x_N=a:\ m=y'_a$ هو قيمة المشتق عند نقطة التماس

لحساب ميل المماس في N: $2(1)+2(2)m-8+4m=0$ ومنه $m=\frac{3}{4}$

معادلة المماس: $y-y_N=m(x-x_N)$

بالتّعويض نجد: $y-2=\frac{3}{4}(x-1)$ أو $3x-4y+5=0$ وهي معادلة الماسس المطلوبة

ملاحظة: إذا كانت $N(x_1,y_1)$ أحد طرفيّ القطر الأفقي للدّائرة

فإن المماس عندها يوازي المحور $y\acute{y}$ وميله غير معرف

ومعادلة المماس في هذه النقطة $x=x_1$

في المثال السابق من أجل $y=-2$ نجد النّقطتين $N_1(-1,-2)$ ، $N_2(9,-2)$ من الدّائرة

وهما طرفا قطر أفقي في الدّائرة فتكون معادلتا المماسين فيهما:

$x=9$, $x=-1$ بالتّرتيب

2 معادلة المماسين لدائرة من نقطة خارجها

مثال 1

في مستوٍ مُحدث بمعْلَمٍ مُتجانِس دائرة C معادلتها:

$$C: \quad x^2+y^2-x-y=0$$

بيّن أنّ النّقطة $A(2,0)$ تقع خارج الدّائرة، ثُمّ اكتب معادلتي المماسّين للدّائرة المرسومين من النّقطة A.

الحل:

$$x^2+y^2-x-y=0$$

$$F(2,0)=(2)^2+(0)^2-(2)-(0)=2>0$$

أي أنّ النّقطة A تقع خارج الدّائرة C.

أو $v\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ ونصف قطرها $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ويكون $vA=\frac{1}{2}\sqrt{26}>R$ فالنّقطة A تقع خارج الدّائرة C

مستقيمات المستوي المارّة بالنّقطة $A(2,0)$ معادلاتها تعطى بالعلاقتين:

$: m\in\mathbb{R} \qquad$ ①... $y+0=m(x-2)$

أو: ②... $x=2$

نكتب المعادلة ① بالشّكل: ①′ ...$mx-y-2m=0$

يكون مستقيم من الحزمة ①′ مماساً للدّائرة عندما يكون بعده عن مركزها $v\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ يساوي نصف قطرها

ومنه:

$$\frac{\left|m\left(\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)-2m\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ومنه} \quad \frac{|3m+1|}{2\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{أو}$$

$$|3m+1|=\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$$

نُربِّع الطرفين فنجد:

$9m^2+6m+1=2\left(m^2+1\right)$ ومنه $7m^2+6m-1=0$ وتكتب $(7m-1)(m+1)=0$

تكافئ $m=-1 \;,\; m=\frac{1}{7}$

يوجد مماسّين $x+y-2=0$ ، $\frac{1}{7}x-y-\frac{2}{7}=0$

أو المماس الأول $x+y-2=0$ والثاني $x-7y-2=0$

بما أنه لا يوجد سوى مماسين لدائرة من نقطة واقعة خارج الدائرة ووجدناهما فإن المستقيم ②... $x=2$ ليس مماساً للدائرة

مثال 2 في مستوٍ مُحدث بمعْلَمٍ مُتجانِس دائرة C معادلتها: $C : x^2+y^2-8x-6y=0$ بيّن أنّ النّقطة $A(-1,0)$ تقع خارج الدّائرة، ثُمّ اكتب معادلتي المماسّين للدّائرة المرسومين من النّقطة A.

الحل: نحسب قوة النّقطة A بالنّسبة للدّائرة

$$F(-1,0)=(-1)^2+(0)^2-8(-1)-6(0)=9>0$$

أي أنّ النّقطة A تقع خارج الدّائرة C.

أو $v(4,3)$ ونصف قطرها $R=5$ ويكون $vA=\sqrt{34}>R$ فالنقطة A تقع خارج الدّائرة C

مستقيمات المستوي المارّة بالنّقطة $A(-1,0)$ معادلاتها تعطى بالعلاقتين:

$m\in\mathbb{R}$: $y+0=m(x+1)$ ...① أو: $x=-1$ ...②

نكتب المعادلة ① بالشّكل: $mx-y+m=0$ ...①′

يكون مستقيم من الحزمة ①′ مماساً للدّائرة عندما بعده عن مركزها $v(4,3)$ يساوي نصف قُطرها ومنه:

$$\frac{|m(4)-(3)+m|}{\sqrt{m^2+1}}=5 \quad \text{تكتب} \quad \frac{|5m-3|}{\sqrt{m^2+1}}=5$$

ومنه $|5m-3|=5\sqrt{m^2+1}$ نُربّع الطّرفين فنجد:

$25m^2-30m+9=25(m^2+1)$ ومنه $30m=-16$ إذاً $m=-\frac{8}{15}$

نبدّل في ① معادلة المماس الأول $y=-\frac{8}{15}(x+1)$

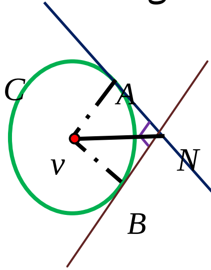
بما أنّنا لم نجد سوى مماس واحد ميله معرّف

فالمماس الثاني ميله غير معرّف معادلته $x=x_A=-1$

تمرين : أوجد مجوعة المحل الهندسي للنُّقط التي ترى منها الدّائرة ضمن زاوية قائمة

ترى الدّائرة ضمن زاوية قائمة إذا كانت محصورة بين مماسين متعامدين للدّائرة

المستقيم المماس عمود على المستقيم الحامل لقُطر الدّائرة في نقطة التّماس



أي أن $\widehat{vAN} = \widehat{vBN} = \frac{\pi}{2}$ و $vA = vB = r$

الشّكل $vANB$ مربّع ويكون $vN = r\sqrt{2}$

أي أن مجموعة النُّقط التي ترى منها الدّائرة ضِمن زاويةٍ قائمةٍ

هي دائرة لها نفس مركز الدّائرة المفروضة ونصف قُطرها $vN = r\sqrt{2}$

مثال : أوجد مجوعة النُّقط التي طول قطعة المماس منها للدّائرة يساوي ثلث بعدها عن مركز الدّائرة

الحل: طول قطعة المماس من النُّقطة $M(x,y)$ للدّائرة $x^2+y^2=r^2$ يساوي

$F(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-r^2}$

وبعد $M(x,y)$ عن مركز الدّائرة $L=\sqrt{x^2+y^2}$

بالفرض $F(x,y)=\frac{1}{3}L$ بالتّعويض $\sqrt{x^2+y^2-r^2}=\frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2}$

بالتّربيع $x^2+y^2-r^2=\frac{1}{9}\left(x^2+y^2\right)$ بالإصلاح $x^2+y^2=\frac{9}{8}r^2$

وهي معادلة دائرة مركزها $(0,0)$ نصف قُطرها $R=\frac{3}{2\sqrt{2}}r$

3 معادلة مماس لدائرة يوازي مستقيماً معلوماً.

مثال:

لتكن الدّائرة C الّتي معادلتها: $x^2+y^2+x-y=0$ والمطلوب:

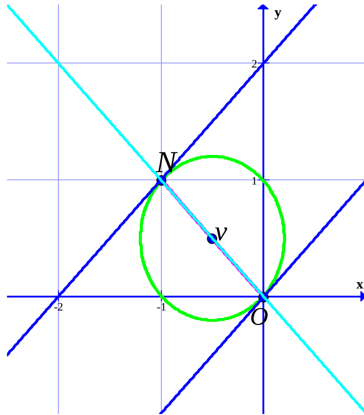
عيّن مركز ونصف قطر الدّائرة ثُمّ أوجد معادلة كلّ مماس للدّائرة ميله $m=1$.

الحل:

مركز الدّائرة $v\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ونصف قطرها $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

معادلة حزمة المستقيمات المتوازية والّتي ميل كل منها $m=1$ تعطى بالعلاقة:

$(h\in\mathbb{R})$: $y=x+h$ وتكتب $x-y+h=0$



يكون مستقيم من الحزمة مماساً للدّائرة C

إذا كان بعد مركز الدّائرة عنه يساوي R.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+h\right|}{\sqrt{1+1}}$$ ومنه $|-1+h|=1$

إمّا: $-1+h=1$ ومنه: $h=2$

وبالتّالي معادلة المماس الأوّل هي: $y=x+2$.

وإمّا: $-1+h=-1$ ومنه: $h=0$

معادلة المماس الثّاني هي: $y=x$.

وإذا طلب تعيين نُقط التماس نحل معادلة كلِّ مماسٍ حلاً مشتركاً مع معادلة الدّائرة

الطريقة الثّانية:

نشتق معادلة الدّائرة بالنّسبة إلى x نجد $2x+2y\cdot y'_x+1-y'_x=0$

نبدل $y'_x=m=1$ نجد $2x+2y+1-1=0$ ومنه $y=-x$..........(1)

نحل المعادلة (1) مع معادلة الدّائرة

نعوض (1) في المعادلة $x^2+y^2+x-y=0$ نجد $2x(x+1)=0$

إمّا $x=0$ أو $x=-1$ بالتّبديل في (1) نجد نقط التّماس

$O(0,0)$, $N(-1,1)$ وميل كل مماس $m=1$

المماس في $O(0,0)$ هو $y=x$ والمماس في $N(-1,1)$ هو $y-1=1\cdot(x+1)$ أو $y=x+2$

الطريقة الثّالثة : ميل المماس $m=1$ فهو من الشّكل $y=x+h$...........(*)

بحل المعادلة (*) مع الدّائرة نجد بالتّعويض في معادلة الدّائرة $x^2+(x+h)^2+x-(x+h)=0$

بالإصلاح نجد $2x^2+2hx+h^2-h=0$.........(**)

شرط التّماس وجود حل مضاعف لمعادلة من الصّيغة $ax^2+bx+c=0$ أي المميّز

$\Delta=b^2-4ac=0$

$\Delta=4h^2-8(h^2-h)$ ومنه $-4h(h-2)=0$

إمّا $h=0$ بالتّعويض في (*) المماس الأول $y=x$

أو $h=2$ بالتّعويض في (*) المماس الثّاني $y=x+2$

وإذا طلب تعيين نقط التّماس نعلم أن عند التّماس للمعادلة جذر المضاعف وهو $x=-\dfrac{b}{2a}$

من أجل $h=0$ وبالنّظر للمعادلة (**) نجد $x=-\dfrac{b}{2a}=0$

بالتّعويض في معادلة المماس الأول نجد نقطة تماسه $O(0,0)$

من أجل $h=2$ وبالنّظر للمعادلة $(**)$ نجد $x=-\frac{b}{2a}=-1$

بالتّعويض في معادلة المماس الثّاني نجد نقطة تماسه $N(-1,1)$

الطّريقة الرّابعة:

نكتب معادلة المستقيم المار من مركز الدّائرة والعمود على المماس (لأن نصف قُطر الدّائرة عمود على مماسها في نقطة التّماس)

مركز الدّائرة $x^2+y^2+x-y=0$ هو $v(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ وميل المستقيم العمود على المماس (الناظم)

$m=-1$

فمعادلته $y-\frac{1}{2}=-\left(x+\frac{1}{2}\right)$ بالإصلاح $y=-x......(2)$ بالحل المشترك للمعادلة (2)مع الدّائرة نجد المعادلة $2x^2+2x=0$ وحلولها إما $x=0$ أو $x=-1$ بالتّبديل في (2) نجد نقط التّماس

$O(0,0)$, $N(-1,1)$ وميل كل مماس $m=1$

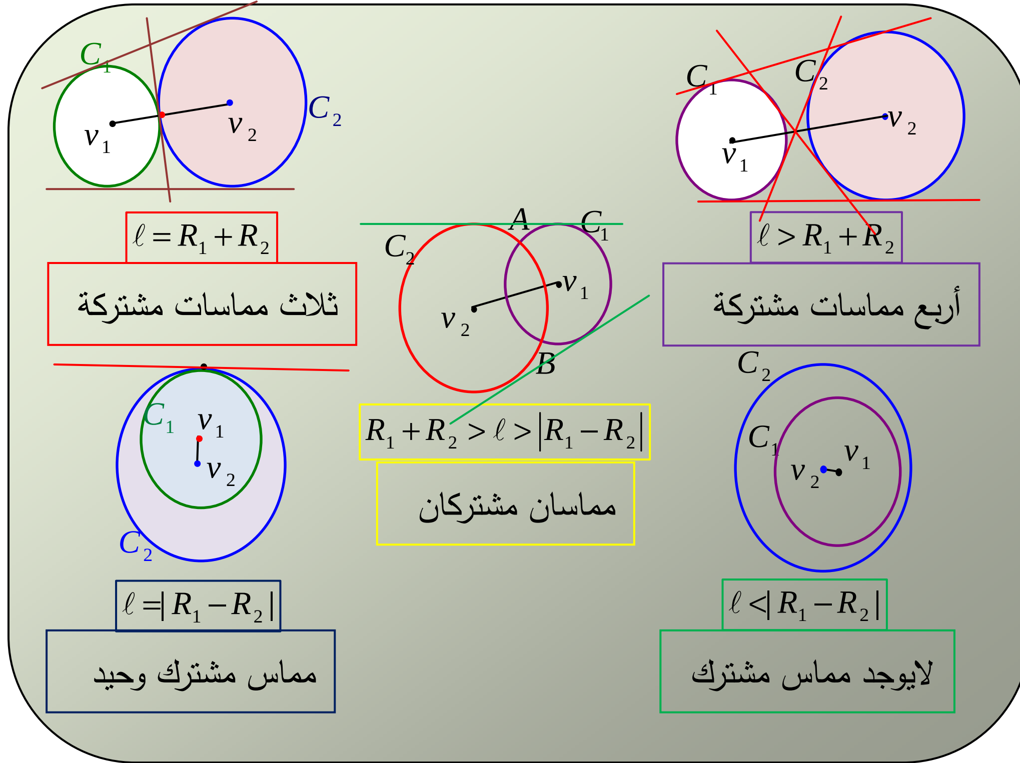
المماس في $O(0,0)$هو $y=x$ والمماس في $N(-1,1)$هو $y-1=1\cdot(x+1)$ أو $y=x+2$

المماسات المشتركة لدائرتين:

نكتب المماس المشترك لدائرتين $m \in \mathbb{R}$: $y = mx + h$ أو: $a \in \mathbb{R}$; $x = a$

نعين الثّوابت على أساس أنّ بعد مركز كل دائرة عن المماس يساوي نصف قطرها

يمكن معرفة عدد المماسات المشتركة من دراسة الوضع النّسبي للدّائرتين



ملاحظات :

①للدّائرتين المتماستان داخلاً مماس مشترك وحيد

②للدّائرتين المتقاطعتين مماسان يلتقيان في نقطة على خط المركزين

③ للدّائرتين المتماستان خارجاً ثلاث مماسات وأحد هذه المماسات في نقطة تماس الدائرتين والمماسين الآخرين

يلتقيان في نقطة على خط المركزين خارج القطعة الواصلة بين المركزين من جهة الدّائرة الصُّغرى

أو (متوازيين إذا كان للدّائرتين أنصاف أقطار متساوية الطول)

④للدائرتين المتباعدتان خارجاً أربع مماسات منهما مماسين يلتقيان في نقطة تقع على القطعة المستقيمة الواصلة بين المركزين والمماسين الآخرين يلتقيان في نقطة على خط المركزين خارج القطعة الواصلة بين المركزين من جهة الدائرة الصغرى أو (متوازيين إذا كان للدائرتين أنصاف أقطار متساوية الطول)

مثال ❶:

ابحث عن المماسات المشتركة للدائرتين

$C_1: \quad x^2+y^2-2x=0$ ، $C_2: \quad x^2+y^2+4y=0$

الحل:

$v_1(1,0)$, $R_1=1$, $v_2(0,-2)$, $R_2=2$

وهما دائرتان متقاطعتان لأن $v_1v_2=\sqrt{5}$ و $|R_1-R_2|<v_1v_2<R_1+R_2$ للدائرتين مماسين مشتركين

نفرض المماس المشترك $m\in\mathbb{R}$: $y=mx+h$ ويكتب $mx-y+h=0$

بعد $v_1(1,0)$ عن المماس يساوي $R_1=1$

$$\frac{|m(1)-(0)+h|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$
$$|m+h|=\sqrt{m^2+1} \;...........(1)$$

بعد $v_2(0,-2)$ عن المماس يساوي $R_1=2$

$$\frac{|m(0)-(-2)+h|}{\sqrt{m^2+1}}=2$$
$$|2+h|=2\sqrt{m^2+1} \;...........(2)$$

من المعادلتين (1) و (2) نجد $|m+h|=2|h+2|$

إما $h=m-4 ....(3)$ أو $h=-\frac{1}{3}m-\frac{4}{3} ....(4)$

نبدل (3) في (1) نجد $|m+m-4|=\sqrt{m^2+1}$

$4m^2-8m+16=m^2+1$ ، $3m^2-8m+15=0$

$\Delta=64-180=-116<0$ مستحيلة

نبدل (4) في (1) نجد $\left|m-\frac{1}{3}m-\frac{4}{3}\right|=\sqrt{m^2+1}$

$|2m-4|=3\sqrt{m^2+1}$

$4m^2-16m+16=9m^2+9$

$5m^2+16m-7=0$

$\Delta=256-140=116$ ، $\sqrt{\Delta}=\sqrt{116}=2\sqrt{29}$

$m_1=\frac{-8-\sqrt{29}}{5}$, $m_2=\frac{-8+\sqrt{29}}{5}$ نبدل في (4) نجد

$h_1=\frac{28+\sqrt{29}}{15}$ ، $h_1=\frac{28-\sqrt{29}}{15}$

المماسين المشتركين $y=\frac{-8-\sqrt{29}}{5}x+\frac{28+\sqrt{29}}{15}$ و $y=\frac{-8+\sqrt{29}}{5}x+\frac{28-\sqrt{29}}{15}$

مثال ❷ : ما عدد المماسات المشتركة للدائرتين ثم أوجد معادلة كل منها

$C_1: \quad x^2+y^2-2x-2y=0$

$C_2: \quad x^2+y^2+4y+4x-24=0$

الحل:

$v_1(1,1)$, $R_1=\sqrt{2}$,$v_2(-2,-2)$, $R_2=4\sqrt{2}$

بما أن $v_1v_2=3\sqrt{2}$ و $v_1v_2=|R_1-R_2|$ الدائرتان متماستان داخلاً يكون للدائرتين مماس مشترك وحيد

معادلة خط المركزين $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=$ و ومنه $\frac{y-1}{x-1}=1$ أو $y=x$

بالحل المشترك مع الدائرة C_1

نعوض $y=x$ في معادلة C_1 نجد $2x^2-4x=0$ لها حلان $x=0\,,\,x=2$ ومنه خط المركزين يقطع الدائرة C_1 في نقطتين $N(2,2)\;,\;O(0,0)$

النقطة $O(0,0)$ لا تحقق C_1 فهي ليست نقطة التماس

أما $N(2,2)$ تحقق C_2 نقطة التماس $N(2,2)$ والمماس فيها عمود على خط المركزين الذي ميله $m=1$ يكون ميل المماس المشترك للدائرتين $y-1=-1(x-1)$ أو $x+y-2=0$

مثال ❸:

ما عدد المماسات المشتركة للدائرتين ثم أوجد معادلة كل منها

$C_1:\quad x^2+y^2=2$ ، $C_2:\quad x^2+y^2-6y-6x+10=0$

الحل:

$R_2=2\sqrt{2}\;,\;v_2(3,3)\;,\;R_1=\sqrt{2}\;,\;v_1(0,0)$

وهما دائرتان متماستان خارجاً لأن $v_1v_2=3\sqrt{2}$ و $v_1v_2=R_1+R_2$ للدائرتين ثلاث مماسات مشتركة

نفرض المماس المشترك $m\in\mathbb{R}:$ $y=mx+h$ ويكتب $mx-y+h=0$

بعد $v_1(0,0)$ عن المماس يساوي $R_1=\sqrt{2}$

$$\frac{|m(0)-(0)+h|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$$
$$|h|=\sqrt{2m^2+2}\;..........(1)$$

بعد $v_2(3,3)$ عن المماس يساوي $R_1=2\sqrt{2}$

$$\frac{|m(3)-(3)+h|}{\sqrt{m^2+1}}=2\sqrt{2}$$

$$|3m-3+h|=2\sqrt{2m^2+2}\ ....(2)$$

من المعادلتين (1) و (2) نجد $|3m-3+h|=2|h|$

إما (3) $h=3m-3.......$ أو (4) $h=-m+1..........$

نبدل (3) في (1) نجد $|3m-3|=\sqrt{2m^2+2}$

$9m^2-18m+9=2m^2+2$ ، $7m^2-18m+7=0$

$$\Delta=324-169=128$$

$$m_1=\frac{9-4\sqrt{2}}{7}\quad,\quad m_2=\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$$

نبدل في (3) نجد $h_1=\frac{6-4\sqrt{2}}{7}$ ، $h_1=\frac{6+4\sqrt{2}}{7}$

$y=\frac{9-4\sqrt{2}}{7}x+\frac{6-4\sqrt{2}}{7}$ والمماس الثاني $y=\frac{9+4\sqrt{2}}{7}x+\frac{6+4\sqrt{2}}{7}$

نبدل (4) في (1) نجد $|-m-1|=\sqrt{2m^2+2}$

$$m^2-2m+1=2m^2+2$$

$m^2+2m+1=0$ ومنه $(m+1)^2=0$

$m=-1$ نبدل في (4) نجد $h=2$ المماس الثالث $y=-x+2$

ملاحظة : لم نبحث فيما إذا كان أحد المماسات من الشكل $a\in\mathbb{R}$: $x=a$ لأننا وجدنا جميع المماسات المطلوبة أما إذا لم نجد جميع المماسات والتي فرضنا أن ميلها معرف فإن باقي المماسات سيكون ميلها غير معرف ومعادلة كل منها $a\in\mathbb{R}$: $x=a$ نحسب a من الشرط بعد المركز عن المماس يساوي نصف قطر الدائرة

مثال :

ما عدد المماسات المشتركة للدائرتين ثم أوجد معادلة كل منها

$C_2: \quad x^2+y^2-6x+5=0$ ، $C_1: \quad x^2+y^2=1$

الحل:

$v_1(0,0)$, $R_1=1$,$v_2(3,0)$, $R_2=2$

وهما دائرتان متماستان خارجاً لأن $v_1v_2=3$ و 3 $v_1v_2=R_1+R_2=3$ للدائرتين ثلاث مماسات مشتركة

نفرض المماس المشترك $:m\in\mathbb{R}$ $y=mx+h$ ويكتب $mx-y+h=0$

بعد $v_1(0,0)$ عن المماس يساوي $R_1=1$

$$\frac{|m(0)-(0)+h|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

$$|h|=\sqrt{m^2+1}\ ....(1)$$

بعد $v_2(3,0)$ عن المماس يساوي $R_1=2$

$$\frac{|m(3)-(0)+h|}{\sqrt{m^2+1}}=2$$

$$|3m+h|=\sqrt{2m^2+2}\ ....(2)$$

من المعادلتين (1) و (2) نجد $|3m+h|=2|h|$ إما (3) $h=3m........$ أو (4) $h=-m..........$

نبدل (3) في (1) نجد $|3m|=\sqrt{m^2+1}$

$m^2=\frac{1}{8}$ ، $9m^2=m^2+1$

$m_2=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $m_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

نبدل في (3) نجد $h_1=\frac{3}{2\sqrt{2}}$ ، $h_1=-\frac{3}{2\sqrt{2}}$

$y=\frac{1}{2\sqrt{2}}(x+3)$ والمماس الثاني $y=-\frac{1}{2\sqrt{2}}(x+3)$

نبدل (4) في (1) نجد $|-m|=\sqrt{m^2+1}$ مستحيلة

$m^2=m^2+1$

لبحث عن المماس الثالث الذي ميله غير معرف معادلته من الشكل $x=a$

كي يمس C_1 يجب أن يتحقق بعد $v_1(0,0)$ عن المماس يساوي $R_1=1$ أي $|0-a|=1$

أي $a=\pm 1$

كي يمس C_2 يجب أن يتحقق بعد $v_2(3,0)$ عن المماس يساوي $R_1=2$ أي $|3-a|=2$

أي $a=1$ أو $a=5$

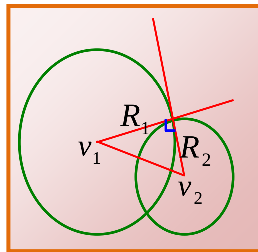
يكون $x=a$ مماس مشترك من أجل $a=1$ فالمماس المشترك الثالث $x=1$

ملاحظة : تعامد دائرتين

نقول عن منحنيين إنهما متعامدان في نقطة مشتركة بينهما إذا كان مماسيهما في هذه النقطة متعامدين

في الحالة الخاصة :إذا كان لدينا دائرتين وكان v_1 , v_2 مركزي الدّائرتين وكان R_1 , R_2 نصفي قطريهما كان شرط تعامد الدّائرتين هو :

$$\overline{v_1v_2}^2=R_1^2+R_2^2$$



مثال : لتكن الدائرتان $C_1: \quad x^2+y^2+2x-4y-20=0$ $C_2: \quad x^2+y^2-8x+12=0$ برهن أنهما متعامدتين

الحل:

مراكز الدائرتين $v_2(4,0)$, $v_1(-1,2)$ وأنصاف أقطارهما $R_2=2$, $R_1=5$

$$\overline{v_1v_2}^2=(4+1)^2+(0-2)^2=29$$
$$R_1^2+R_2^2=25+4=29$$

تحقق شرط تعامد دائرتين $\overline{v_1v_2}^2=R_1^2+R_2^2$ فإن C_2 , C_1 متعامدتين

تمارين:

①أوجد معادلة الدائرة التي مركزها	$v(-2,1)$	ونصف قطرها	3

الحل:

الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=R^2$

ومنه معادلة الدائرة المطلوبة $(x+2)^2+(y-1)^2=9$

②أوجد معادلة الدائرة التي تقبل القطعة المستقيمة	$[AB]$	قطراً لها حيث	$A(-5,4)$	،	$B(3,-2)$

الحل:

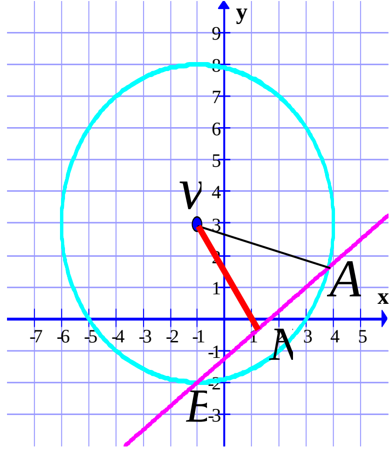
مركز الدائرة منتصف $[AB]$ فهو $v(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2})=(-1,1)$

ونصف قطر الدائرة $R=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$ أو $R=vA$

$R=5$ ومنه معادلة الدائرة $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=R^2$

بالتعويض $(x+1)^2+(y-1)^2=25$

③ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $v\left(-1,3\right)$ وتقتطع من المستقيم $\Delta : 3x - 4y - 5 = 0$ وترأ طوله 6 وحدة طول



الحل : لنحسب بعد مركز الدائرة عن المستقيم

$$vN = \frac{\left|3(-1) - 4(3) - 5\right|}{\sqrt{9+16}} = 4$$

العمود من مركز الدائرة على وتر فيها ينصفه

فيكون $AN = 3$

حسب مبرهنة فيثاغورث على المثلث vNA

يكون $\overline{vA}^2 = \overline{vN}^2 + \overline{AN}^2 = 25$

أي $R = 5$ وبالتالي معادلة الدائرة $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$

④ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $v\left(2,-4\right)$ وتمس من المستقيم $\Delta : 3x - 4y - 7 = 0$

الحل: بعد مركز الدائرة عن مماس لها هو R

إذاً $R = \frac{\left|3(2) - 4(-4) - 7\right|}{\sqrt{9+16}} = 3$

فمعادلة الدائرة $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 15$

⑤ أوجد معادلة كل دائرة مركزها على المستقيم $\Delta: x+y-2=0$

وتمس كلاً من المستقيمين $\Delta_1: 3x+4y+18=0$ و $\Delta_2: 4x-3y+24=0$

الحل:

مركزها على المستقيم $\Delta: x+y-2=0$ تحقق معادلته أي: $x_0+y_0-2=0........(1)$

وتمس من المستقيم $\Delta_1: 3x+4y+18=0$

بعد مركز الدائرة عن مماس لها هو R أي $R=\dfrac{|3x_0+4y_0+18|}{5}.........(2)$

وتمس من المستقيم $\Delta_2: 4x-3y+24=0$

بعد مركز الدائرة عن المماس هو R أي $R=\dfrac{|4x_0-3y_0+24|}{5}.........(3)$

من المعادلتين (3) و (2) وبالمساواة بينهما $|4x_0-3y_0+24|=|3x_0+4y_0+18|$

وهذه المعادلة تكافئ المعادلتين الآتيتين:

$$\begin{cases} 4x_0-3y_0+24=3x_0+4y_0+18 \\ 4x_0-3y_0+24=-3x_0-4y_0-18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0-7y_0+6=0..........(4) \\ 7x_0+y_0+42=0.........(5) \end{cases}$$

بطرح (1) و (4) نجد $-8y_0+8=0$ ومنه $y_0=1$ نبدل في (1) نجد $x_0=1$ أي $v_1(1,1)$

نبدل في (2) نجد $R_1=5$ الدائرة الأولى $C_1:(x-1)^2+(y-1)^2=25$

بطرح (1) و (5) نجد $6x_0+44=0$ ومنه $x_0=\dfrac{22}{3}$ نبدل في (1) نجد $y_0=-\dfrac{16}{3}$ أي $v_2(\dfrac{22}{3},-\dfrac{16}{3})$

نبدل في (2) نجد $R_1=\dfrac{56}{15}$ الدائرة الثانية $C_2:\left(x-\dfrac{22}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{16}{3}\right)^2=\left(\dfrac{56}{15}\right)^2$

6 أوجد معادلة دائرة تمر من النقاط $A(2,6)$ و $B(3,-1)$ و $C(-5,5)$

الحل:

نختار الصيغة العامة لمعادلة الدائرة

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

كل نقطة تنتمي لمنحن تحقق معادلته فالنقاط المفروضة تحقق معادلة الدائرة

من أجل النقطة $A(2,6)$ نجد $40+2a+6b+c=0.........(1)$

من أجل النقطة $B(3,-1)$ نجد $10+3a-b+c=0.........(2)$

من أجل النقطة $C(-5,5)$ نجد $50-5a+5b+c=0.........(3)$

يمكن حل جملة المعادلات بعدة طرق لنحلها بالشكل الآتي

نطرح (1)و (2) من (3) نجد $10-7a-b=0.........(4)$ و $20-4a+3b=0.........(5)$

نضرب (4)بالعدد 3 ونجمع الناتج إلى (5) نجد $50-25a=0$ نجد $a=2$ نعوض في (4)نجد

$b=-4$

نعوض $a=2$ و $b=-4$ في (2) نجد $c=-20$

والمعادلة المطلوبة $x^2+y^2+2x-4y-20=0$

7 أوجد معادلة دائرة تمر من النقطتين $A(2,2)$ و $B(0,2)$ ومركزها على المستقيم $\Delta: x+y-2=0$

الحل: نختار الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

كل نقطة تنتمي لمنحن تحقق معادلته فالنقاط المفروضة تحقق معادلة الدائرة

من أجل النقطة $A(2,2)$ نجد

$$(2-x_0)^2+(2-y_0)^2-R^2=0$$
$$x_0^2+y_0^2-4x_0-4y_0+8-R^2=0.........(1)$$

من أجل النقطة $B(0,2)$ نجد

$$(0-x_0)^2+(2-y_0)^2-R^2=0$$
$$x_0^2+y_0^2-4y_0+4-R^2=0.........(2)$$

ومركزها على المستقيم $\Delta: x+y-2=0$ يحقق معادلته $x_0+y_0-2=0..........(3)$

نطرح (1) من (2) نجد $4x_0-4=0$ ومنه $x_0=1$ نبدل في (3) نجد $y_0=1$

بالتعويض في (2) نجد $R=\sqrt{2}$

الدائرة المطلوبة $(x-1)^2+(y-1)^2=2$

8 أوجد معادلة كل دائرة تمس محوري الإحداثيات وتمس المستقيم $\Delta: 3x+4y-12=0$ وارسم Δ وارسم الدوائر

الحل:

تمس المحور $x'x$ يتحقق $|y_0|=R..........(1)$

تمس المحور $y'y$ يتحقق $|x_0|=R..........(2)$

تمس المستقيم Δ يتحقق $\dfrac{|3x_0+4y_0-12|}{\sqrt{9+16}}=R$ أو $|3x_0+4y_0-12|=5R.........(3)$

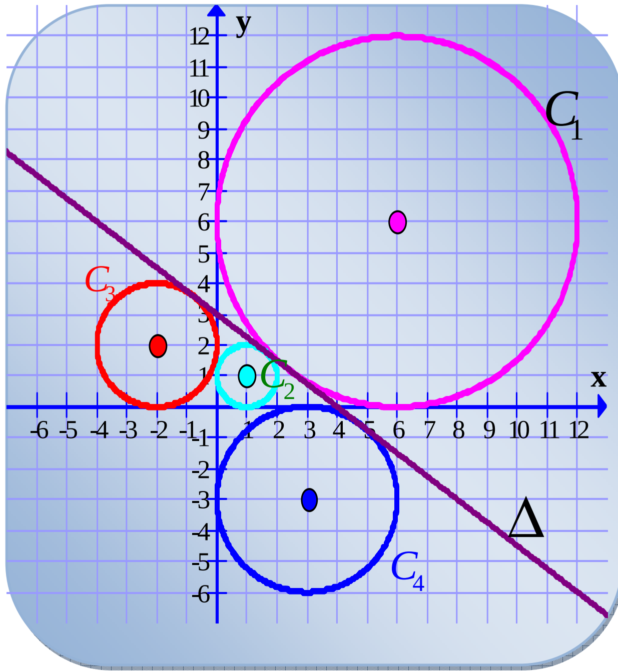
من (1) و (2) نجد $|y_0|=|x_0|$ وتكافئ المعادلتين $y_0=x_0...........(4)$ أو $y_0=-x_0...........(5)$

* نبدل (2) و (4) في (3)

نجد $|3x_0+4x_0-12|=5|x_0|$

لهذه المعادلة حلان $x_0=6$ و $x_0=1$

من أجل $x_0=6$ نجد $y_0=6=R$



الدائرة الأولى $C_1:(x-6)^2+(y-6)^2=36$

من أجل $x_0=1$ نجد $y_0=1=R$

الدائرة الثانية $C_2:(x-1)^2+(y-1)^2=1$

* نبدل (2) و (5) في (3)

نجد $|3x_0-4x_0-12|=5|x_0|$

لهذه المعادلة حلان $x_0=-2$ و $x_0=3$

من أجل $x_0=-2$ نجد $y_0=2=R$

الدائرة الثالثة $C_3:(x+2)^2+(y-2)^2=4$

من أجل $x_0=3$ نجد $y_0=-3,\ R=3$

الدائرة الرابعة $C_4:(x-3)^2+(y+3)^2=9$

9 لتكن المستقيمات $mx+\sqrt{1-m^2}y+3+2m=0$ حيث m وسيط و $m\in[-1,1]$

بين أن كل مستقيم من هذه المستقيمات يمس دائرة ثابتة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

الحل : يوجد نقطة $V(x,y)$ في المستوي بعدها عن المستقيم $mx+\sqrt{1-m^2}y+3+2m=0$ يساوي ثابت

أياً كانت $m \in [-1,1]$ أي $\frac{\left|mx+\sqrt{1-m^2}y+2m+3\right|}{\sqrt{m^2+1-m^2}}=r$ و r ثابت موجب

ومنه $\left|mx+\sqrt{1-m^2}y+2m+3\right|=r$

أي $\left|m(x+2)+\sqrt{1-m^2}y+3\right|=r$ محققة أياً كانت $m \in [-1,1]$ و r ثابت

يتحقق ذلك عندما $x=-2\ ,\ y=0\ ,\ r=3$

أي أن الدائرة $(x+2)^2+y^2=9$ تمس كل مستقيم $mx+\sqrt{1-m^2}y+3+2m=0$ و $m \in [-1,1]$

التّمثيل الوسيطي لدّائرة:

الصيغة القياسية لمعادلة دائرة مركزها $v(x_o,y_o)$ ونصف قطرها R هو:

$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=R^2$$

أو:

$$\frac{(x-x_o)^2}{R^2}+\frac{(y-y_o)^2}{R^2}=1$$

بالمقارنة مع المتطابقة المثلثية $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ ، حيث: $\theta \in \mathbb{R}$ يمكننا لأن نفرض

$\frac{x-x_o}{R}=\cos\theta$ و $\frac{y-y_o}{R}=\sin\theta$

ومنه $x=x_o+R\cos\theta$ و $y=y_o+R\sin\theta$

$$\begin{cases} x=x_0+R\cos\theta & \dots① \\ y=y_0+R\sin\theta & \dots② \end{cases} \quad :(\theta \in \mathbb{R})$$

نسمِّي المعادلتين ① و ② معادلتان وسيطيّتان للدّائرة C.

مثال ①:

لتكن $M\,(x\,,y\,)$ نقطة من المستوي إحداثيّاتها معينة بالعلاقتين:

$$x = 3+4\cos\theta \quad ...①$$
$$y = -1+4\sin\theta \quad ...② \qquad :(\theta\in\mathbb{R})$$

ماذا تُمثِّل مجموعة النقط $M\,(x\,,y\,)$ ؟ ثم أوجد المعادلة الدّيكارتيّة لمجموعة النّقط M .

الحل:

المعادلتان ① و ② معادلتين وسيطيّتين لدّائرة C مركزها $v\,(3,-1)$ ونصف قطرها $R=4$

تكتب المعادلة ①: $\cos\theta = \dfrac{x-3}{4}$

تكتب المعادلة ②: $\sin\theta = \dfrac{y+1}{4}$

بالتّربيع والجمع نجد:

$$\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$$
$$(x-3)^2+(y+1)^2=16$$

وتُمثِّل هذه المعادلة دائرة مركزها $v\,(3,-1)$ ونصف قطرها $R=4$.

مثال ②:

اكتب تمثيلاً وسيطياً للدائرة $C:\quad x^2+y^2+4x-6y-36=0$

الحل : تكتب الدائرة $C:\quad (x+2)^2+(y-3)^2=49$

مركزها $v\,(-2,3)$ ونصف قطرها $R=7$ وأحد التمثيلات الوسيطية لها

$$\begin{cases} x = x_0+R\cos\theta \\ y = y_0+R\sin\theta \end{cases} :(\theta\in\mathbb{R})$$

ومنه

$$\begin{cases} x = -2+7\cos\theta \\ y = 3+7\sin\theta \end{cases} :(\theta\in\mathbb{R})$$

ملاحظة : قد نكتب المعادلات الوسيطية للدائرة على أكثر من شكل مثال ذلك

$$\begin{cases} x = x_0 + R\sin\theta \\ y = y_0 + R\cos\theta \end{cases} : (\theta \in \mathbb{R}) \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x = x_0 - R\cos\theta \\ y = y_0 + R\sin\theta \end{cases} : (\theta \in \mathbb{R})$$

وغيرها من المعادلات التي تؤول إلى $\left(\frac{x - x_o}{R}\right)^2 = \cos^2\theta$ و $\left(\frac{y - y_o}{R}\right)^2 = \sin^2\theta$

تمرين : لتكن مجموعة النقاط $M(x, y)$ التي معادلتها

$$x^2 + y^2 - 2x\cos\theta - 2y\sin\theta + \cos 2\theta = 0 \quad : \theta \in \mathbb{R}$$

(1) بين حسب قيم $\theta \in \mathbb{R}$ ماذا تمثل مجموعة النقاط M

(2) عندما تمثل المعادلة دائرة

1. أوجد المحل الهندسي لمركز الدائرة
2. عين من هذه الدوائر الدائرة التي تمس المستقيم $\Delta : x + y = 0$

الحل : (1) بالإتمام إلى مربع كامل

$$(x - \cos\theta)^2 - \cos^2\theta + (y - \sin\theta)^2 - \sin^2\theta + \cos 2\theta = 0$$
$$(x - \cos\theta)^2 - \cos^2\theta + (y - \sin\theta)^2 - \sin^2\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta = 0$$
$$(x - \cos\theta)^2 + (y - \sin\theta)^2 = 2\sin^2\theta$$

عندما $k \in \mathbb{Z}$: $\theta \neq \pi k$ يكون $\sin\theta \neq 0$ المعادلة تمثل دائرة

مركزها $V(\cos\theta, \sin\theta)$ ونصف طرها $r = \sqrt{2}|\sin\theta|$

عندما $k \in \mathbb{Z}$: $\theta = \pi k$ يكون $\sin\theta = 0$ المعادلة تمثل نقطة وحيدة $\{(\cos\theta, 0)\} : \theta = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

أي تمثل إحدى النقطتين $(1,0)$ أو $(-1,0)$

$\theta \neq \pi k \;:\; k \in \mathbb{Z}$ ②

① إحداثيات كركز الدائرة $x = \cos\theta \,,\, y = \sin\theta$ بالتربيع والجمع $x^2 + y^2 = 1$

الحامل الهندسي لمراكز الدوائر دائرة مركزها $O(0,0)$ ونصف قطرها 1

بما أن $\theta \neq \pi k \;:\; k \in \mathbb{Z}$ عندما $\theta = 2\pi k \;:\; k \in \mathbb{Z}$ نجد النقطة $(1,0)$

وعندما $\theta = \pi + 2\pi k \;:\; k \in \mathbb{Z}$ نجد النقطة $(-1,0)$

المحل الهندسي لمراكز الدوائر المفروضة هو الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ عدا النقطتين $(1,0)$ و $(-1,0)$

② الدائرة تمس $\Delta : x + y = 0$ بعد مركزها نع هذا المستقيم يساوي نصف قطرها

أي $\frac{|\cos\theta + \sin\theta|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|\sin\theta|$ أو $|\cos\theta + \sin\theta| = 2|\sin\theta|$

إما $\cos\theta + \sin\theta = 2\sin\theta$ ومنه $\sin\theta = \cos\theta$ أي $\tan\theta = 1$ ومنه $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi k \;:\; k \in \mathbb{Z}$

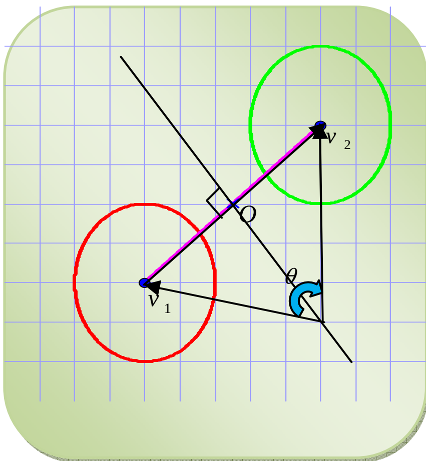
أو $\cos\theta + \sin\theta = -2\sin\theta$ ومنه $3\sin\theta = -\cos\theta$ أي $\tan\theta = -\frac{1}{3}$

ومنه $\theta = acr\tan\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k \;:\; k \in \mathbb{Z}$

الدائرة والتحويلات النقطية:

لتكن الدائرتان $C_1(v_1, R_1)$ ، $C_2(v_2, R_2)$

أولاً : $R_1 = R_2$



❶ يمكن اعتبار C_2 صورة C_1 بانسحاب $t_{\vec{v}}$

متجه هذا الانسحاب $\vec{v} = \overrightarrow{v_1 v_2}$

❷ يمكن اعتبار C_2 صورة C_1 وفق تناظر (انعكاس)

بالنسبة إلى مستقيم Δ هو محور خط المركزين

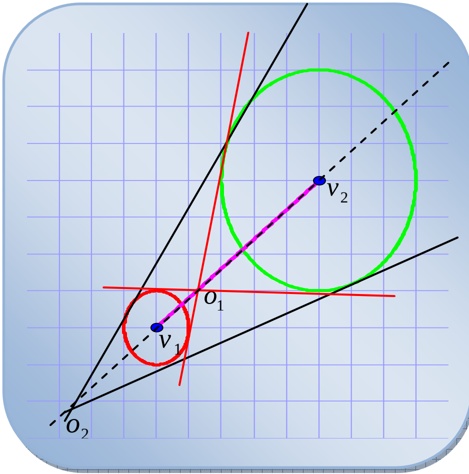
(محور القطعة المستقيمة $[v_1v_2]$)

❸يمكن اعتبار C_2 صورة C_1 وفق تناظر بالنسبة

إلى O منتصف القطعة المستقيمة $[v_1v_2]$

❹ يمكن اعتبار C_2 صورة C_1 وفق دوران مركزه نقطة A من Δ محور القطعة

المستقيمة $[v_1v_2]$ زاويته $\theta=(\widehat{\overrightarrow{Av_1},\overrightarrow{Av_2}})$



ثانياً : $R_1 \neq R_2$

تعتبر C_2 صورة C_1 وفق تحاكٍ $h_{(v,k)}$

مركزه v نقطة على خط المركزين

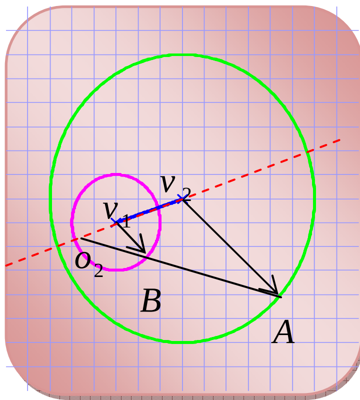
اقرب إلى مركز الدائرة الصغرى نسبته التحاكي

$k=\frac{R_2}{R_1}$ إذا كان مركز التحاكي o_2 خارج القطعة $[v_1v_2]$

عندئذ : $\frac{o_2v_1}{o_2v_2}=\frac{R_1}{R_2}$

و $k=-\frac{R_1}{R_2}$ إذا كان مركز التحاكي o_1 داخل القطعة $[v_1v_2]$

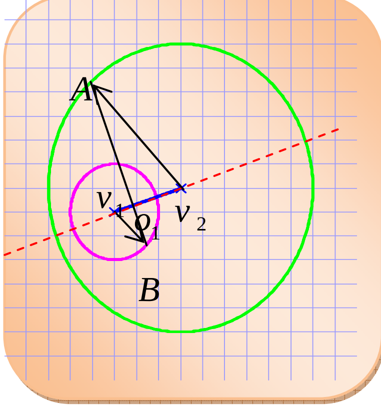
عندئذ : $\frac{o_1v_1}{o_1v_2}=-\frac{R_1}{R_2}$



ملاحظة : **تعيين مركز تحاكي دائرتين**

①نقطة تقاطع المماس المشترك مع خط المركزين أو امتداده

هو مركز التحاكي ويحقق $\frac{o_2v_1}{o_2v_2}=\frac{R_1}{R_2}$ أو $\frac{o_1v_1}{o_1v_2}=-\frac{R_1}{R_2}$



②نرسم نصفا قطرين متوازيين للدائرتين

ولتكن أنصاف الأقطار v_1B , v_2A

نرسم BA الواصل بين طرفي نصفي القطرين ونمدده

يقطع خط المركزين أو امتداده في مركز التحاكي

إذا كان $\overrightarrow{v_2A}$, $\overrightarrow{v_1B}$ من جهة واحدة كان $\frac{o_2v_1}{o_2v_2}=\frac{R_1}{R_2}$

إذا كان $\overrightarrow{v_2A}$, $\overrightarrow{v_1B}$ من جهتين مختلفتين كان $\frac{o_1v_1}{o_1v_2}=-\frac{R_1}{R_2}$

أمثلة:

لتكن الدّائرة $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ $C:$ والشعاع: $\vec{v}=2\vec{i}-3\vec{j}$

❶أوجد معادلة C_1صورة الدّائرة C وفق انسحاب : $t_{\vec{v}}$

❷أوجد معادلة C_2 نظيرة الدّائرة C بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

❸أوجد معادلة C_3نظيرة الدّائرة C بالنسبة للنقطة $A(-2,1)$

❹أوجد معادلة C_4نظيرة الدّائرة C بالنسبة للمستقيم $y=3$

❺أوجد معادلة C_5نظيرة الدّائرة C بالنسبة للمستقيم $x=-2$

❻أوجد معادلة C_6صورة الدّائرة C بالتحاكي $h(o,\frac{1}{2})$

❼أوجد معادلة C_7صورة الدّائرة C وفق التحويل: $t_{\vec{v}}\circ h_{(O,-2)}$ حيث $\vec{v}=2\vec{i}-3\vec{j}$

❽ أوجد معادلة C_8 صورة Cوفق التحويل $h_{(O,-2)}\circ t_{\vec{v}}$ حيث $\vec{v}=2\vec{i}-3\vec{j}$

❾ أوجد معادلة C_9 صورة Cوفق التحويل $h_{(A,3)}$ حيث $A(1,-2)$

الحل:

❶لتكن $M(x,y)$ نقطة من الدّائرة C وليكن $M'(x',y')=t_{\vec{v}}(M)=(x+2,y-3)$

فيكون: $y'=y-3$, $x'=x+2$

ومنه: $y=y'+3$, $x=x'-2$

نعوض في معادلة الدّائرة نجد: $C_1:\ (x'-2)^2+(y'+3)^2-2(x'-2)+4(y'+3)-20=0$

ومنه $C_1:x'^2+y'^2-6x'+10y'+9=0$ نحذف $(')$ $C_1:x^2+y^2-6x+10y+9=0$

❷ لتكن $M(x,y)$ نقطة من الدّائرة C وليكن $M'(x',y')=g_{O(0,0)}(M)=(-x,-y)$

فيكون: $y' = -y \quad , \quad x' = -x$

ومنه: $y = -y' \quad , \quad x = -x'$

نعوض في معادلة الدّائرة ونحذف $(')$نجد: $C_2 : \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$

❸لتكن $M(x,y)$ نقطة من الدّائرة C وليكن $M'(x',y') = g_{A(x_0,y_0)}(M) = (2x_0 - x, 2y_0 - y)$

$M'(x',y') = g_{A(-2,1)}(M) = (-4 - x, 2 - y)$

فيكون: $y' = 2 - y \quad , \quad x' = -4 - x$

ومنه: $y = 2 - y' \quad , \quad x = -4 - x'$

نعوض في معادلة الدّائرة نجد: $C_3 : \quad (-4 - x')^2 + (2 - y')^2 - 2(-4 - x') + 4(2 - y') - 20 = 0$

بالإصلاح ونحذف $(')$ نجد $C_3 : \; x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 = 0$

❹لتكن $M(x,y)$ نقطة من الدّائرة C وليكن $M'(x',y') = g_{\Delta: y=3}(M) = (x, 2y_0 - y)$

$M'(x',y') = g_{\Delta: y=3}(M) = (x, 6 - y)$

فيكون: $y' = 6 - y \quad , \quad x' = x$

ومنه: $y = 6 - y' \quad , \quad x = x'$

نعوض في معادلة الدّائرة نجد: $C_4 : \quad (x')^2 + (6 - y')^2 - 2(x') + 4(6 - y') - 20 = 0$

بالإصلاح ونحذف $(')$ نجد $C_4 : \; x^2 + y^2 - 2x - 16y + 40 = 0$

❺لتكن $M(x,y)$ نقطة من الدّائرة C وليكن $M'(x',y') = g_{\Delta: x=x_0}(M) = (2x_0 - x, y)$

$M'(x',y') = g_{\Delta: x=-2}(M) = (-4 - x, y)$

فيكون: $y' = y \quad , \quad x' = -4 - x$

ومنه: $y=y'\quad,\quad x=-4-x'$

نعوض في معادلة الدّائرة نجد: $C_5:\quad (-4-x')^2+(y')^2-2(-4-x')+4(y')-20=0$

بالإصلاح ونحذف ($'$) نجد $C_5:\ x^2+y^2+10x+4y+4=0$

❻لتكن $M(x,y)$ نقطة من الدّائرة C وليكن $M'(x',y')=h_{(O,\frac{1}{2})}(M)=(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}y)$

فيكون: $y'=\frac{1}{2}y\quad,\quad x'=\frac{1}{2}x$

ومنه: $y=2y'\quad,\quad x=2x'$

نعوض في معادلة الدّائرة ونقسم على 4 ونحذف ($'$)نجد: $C_6:\quad x^2+y^2-x+2y-5=0$

❼ أوجد معادلة C_7صورة الدّائرة C وفق التحويل: $t_{\vec{v}}\circ h_{(O,-2)}$ حيث $\vec{v}=2\vec{i}-3\vec{j}$

وفق التحويل: $t_{\vec{v}}\circ h_{(O,-2)}$:

$$(x',y')=t_{\vec{v}}\circ h_{(O,-2)}(x,y)=t_{\vec{v}}\left(h_{(O,-2)}(x,y)\right)$$
$$(x',y')=t_{\vec{v}}(-2x,-2y)=(-2x+2,-2y-3)$$

$$\begin{cases}x'=-2x+2\\ y'=-2y-3\end{cases}\quad \text{ومنه}\quad \begin{cases}x=\frac{1}{2}(-x'+2)\\ y=\frac{1}{2}(-y-3)\end{cases}$$

$$C_7:\quad \frac{1}{4}(-x'+4)^2+\frac{1}{4}(-y'-6)^2-(-x'+4)+2(-y'-6)-20=0$$

نضرب بالعدد 4 ونحذف ($'$) ونصلح المعادلة نجد

$$C_7:\quad (-x'+2)^2+(-y'-3)^2-4(-x'+2)+8(-y'-3)-80=0$$
$$C_7: x^2+y^2-2y-99=0$$

حل آخر لتكن C' صورة $C: \quad x^2+y^2-2x+4y-20=0$ وفق التّحاكي $h_{(0,-2)}$:

$y'=-2y \quad , \quad x'=-2x$ ومنه $y=-\frac{1}{2}y' \quad , \quad x=-\frac{1}{2}x'$

$C': \quad x^2+y^2+4x-8y-80=0$

وبفرض $M(x,y)$ نقطة من C' ، $M'(x',y')=t_{\vec{v}}(M)$

فيكون: $y'=y-3 \quad , \quad x'=x+2$

ومنه: $y=y'+3 \quad , \quad x=x'-2$

نعوض في معادلة C' نجد: $C': \quad x^2+y^2-8x+16y-80=0$

$$(x'-2)^2+(y'+3)^2+4(x'-2)-8(y+3)-80=0$$

ونحذف ($'$) ونصلح المعادلة نجد

$$C_7: \quad x^2+y^2-2y-99=0$$

❽ أوجد معادلة C_8 صورة C وفق التحويل $h_{(O,-2)}\circ t_{\vec{v}}$ حيث $\vec{v}=2\vec{i}-3\vec{j}$

وفق التحويل: $h_{(O,-2)}\circ t_{\vec{v}}$:

$$(x',y')=h_{(O,-2)}\circ t_{\vec{v}}(x,y)=h_{(O,-2)}\left(t_{\vec{v}}(x,y)\right)$$
$$(x',y')=h_{(O,-2)}(x+2,y-3)=(-2x-4,-2y+6)$$

$\begin{cases} x'=-2x-4 \\ y'=-2y+6 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=\frac{1}{2}(-x'-8) \\ y=\frac{1}{2}(-y+12) \end{cases}$

$$C_8: \quad \frac{1}{4}(-x'-8)^2+\frac{1}{4}(-y'+12)^2-(-x'-8)+2(-y'+12)-20=0$$

نضرب بالعدد 4 ونحذف ($'$) ونصلح المعادلة نجد

$C_8: \quad (-x'-8)^2+(-y'+12)^2-4(-x'-8)+8(-y'+12)-80=0$
$C_8: x^2+y^2+20x-32y+256=0$

❾ أوجد معادلة C_9 صورة C وفق التحويل $h_{(A,3)}$ حيث $A(1,-2)$

لتكن $M(x,y)$ نقطة من الدّائرة C وليكن $M'(x',y')=h_{(A,3)}(M)$

فإن $\begin{cases} x'=kx-kx_0+x_0 \\ y'=ky-ky_0+y_0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x'=3x-2 \\ y'=3y+4 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=\frac{1}{3}(x'+2) \\ y=\frac{1}{3}(y'-4) \end{cases}$

بالتعويض في الدائرة $C: \quad x^2+y^2-2x+4y-20=0$

نجد $C_9: \quad \frac{1}{9}(x'+2)^2+\frac{1}{9}(y'-4)^2-2(x'+2)+4(y'-4)-20=0$
$C_9: \; x'^2+y'^2-14x'+28y'-240=0$

نحذف $(')$ $C_9: \; x^2+y^2-14x+28y-240=0$

مسألة

لتكن الدائرتان:

$$C_1 : x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$
$$C_2 : (x+3)^2 + y^2 = 1$$

❶أثبت أن C_2 صورة C_1 وفق متجه $\vec{v}$ عين هذا المتجه

❷أثبت أن C_2 صورة C_1 وفق تناظر بالنسبة إلى نقطة أوجدها

❸أثبت أن C_2 صورة C_1 وفق تناظر بالنسبة إلى مستقيم Δ أوجد معادلته

❹أثبت أن C_2 صورة C_1 وفق دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ عين مركز الدوران

❺هل يمكن أن تكون C_2 صورة C_1 وفق دوران مركز $O(0,0)$ ولماذا؟

❻ أوجد زاوية الدوران إذا كانت فاصلة مركز الدوران $x_0 = -\frac{3}{2}$

❼ إذا كانت $C_3 : x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$ أثبت أن C_3 صورة C_1 وفق تحاكٍ عين مركز ونسبته

الحل:❶ لتعين عناصر الدائرتين نجد:

تكتب C_1 بالصيغة القياسية $C_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ تكون عناصر C_1 :

$v_1(1,1) \quad , \quad R_1 = 1$

عناصر C_2 : $\quad v_2(-3,0) \quad , \quad R_2 = 1$

بما أن $R_2 = R_1$ نعتبر C_2 صورة C_1 وفق متجه $\vec{v} = \overrightarrow{v_1 v_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$

ومنه $\vec{v} = 4\vec{i} + \vec{j}$

❷ بما أن $R_2 = R_1$ نعتبر C_2 صورة C_1 وفق تناظر مركزه v منتصف القطعة $[v_1 v_2]$

تكون $v(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})=(-1,\frac{1}{2})$

❸ بما أن $R_2=R_1$ نعتبر C_2 صورة C_1 وفق تناظر للمستقيم Δ محور القطعة المستقيمة $[v_1v_2]$

$m_{(v_1v_2)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1}{4}$ يكون $m_{(v_1v_2)}\cdot m_\Delta=-1$ ومنه $m_\Delta=-4$

ويمر Δ من $v(-1,\frac{1}{2})$ منتصف $[v_1v_2]$

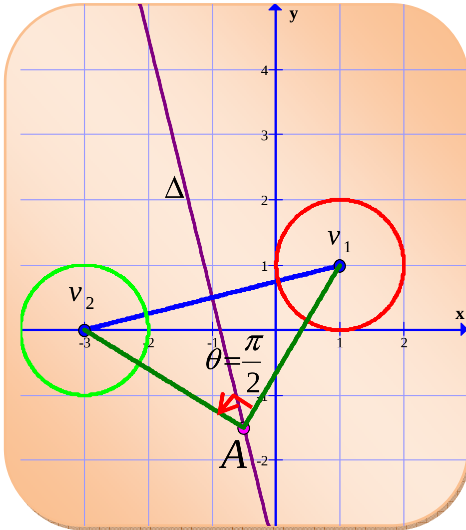
معادلة Δ هي $y-\frac{1}{2}=-4(x+1)$ أو $\Delta:8x+2y+7=0$ هو محور التناظر المطلوب

❹ بما أن $R_2=R_1$ نعتبر C_2 صورة C_1 وفق دوران مركزه على المستقيم Δ محور القطعة المستقيمة $[v_1v_2]$

إذا فرضنا هذا المركز $A(x_0,y_0)$ فهي تحقق معادلة Δ

أي $8x_0+2y_0+7=0.........(1)$

بما أن زاوية الدوران $\frac{\pi}{2}$ و $v_2(-3,0)$ صورة $v_1(1,1)$



وفق هذا الدوران نبدل في دساتير الدوران

$$\begin{cases} x'=(x-x_0)\cos\theta-(y-y_0)\sin\theta+x_0 \\ y'=(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta+y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3=(1-x_0)\times(0)-(1-y_0)\times(1)+x_0 \\ 0=(1-x_0)\times(1)+(1-y_0)\times(0)+y_0 \end{cases}$$

ومنه $\begin{cases} x_0+y_0=-2 \\ x_0-y_0=1 \end{cases}$

بالحل المشترك نجد مركز الدوران $A(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$

لاحظ النقطة $A(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$ تحقق معادلة Δ

❺ بما أن $O(0,0)$ لا تحقق معادلة Δ لا يمكن أن تكون مركز لدوران تكون C_2 صورة C_1 وفق هذا الدوران

❻ بما أن $x_0=-\frac{3}{2}$ ومركز الدوران على محور خط المركزين $\Delta:8x+2y+7=0$

بالتعويض $8\left(-\frac{3}{2}\right)+2y_0+7=0$ ومنه $y_0=\frac{5}{2}$ مركز الدوران $A(-\frac{3}{2},\frac{5}{2})$

وبما أن $v_2(-3,0)$ صورة $v_1(1,1)$ وفق هذا الدوران نبدل في دساتير الدوران

$$\begin{cases} x'=(x-x_0)\cos\theta-(y-y_0)\sin\theta+x_0 \\ y'=(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta+y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3=\left(1+\frac{3}{2}\right)\cos\theta-\left(1-\frac{5}{2}\right)\sin\theta-\frac{3}{2} \\ 0=\left(1+\frac{3}{2}\right)\sin\theta+\left(1-\frac{5}{2}\right)\cos\theta+\frac{5}{2} \end{cases}$$ بعمليات إصلاح نجد $$\begin{cases} -3=5\cos\theta+3\sin\theta \\ -5=5\sin\theta-3\cos\theta \end{cases}$$

بالحل المشترك من الأولى $\sin\theta=-\frac{5}{3}\cos\theta-1$ نبدل في الثانية نجد $-5=\frac{-25}{3}\cos\theta-5-3\cos\theta$

ومنه $\cos\theta=0$ بالتعويض في الأولى نجد $\sin\theta=-1$ تكون زاوية الدوران $\theta=-\frac{\theta}{2}$

❼ الدائرة $C_3:x^2+y^2-4x+6y+9=0$ مركزها $v_3(2,-3)$ ونصف قطرها $R_3=2$

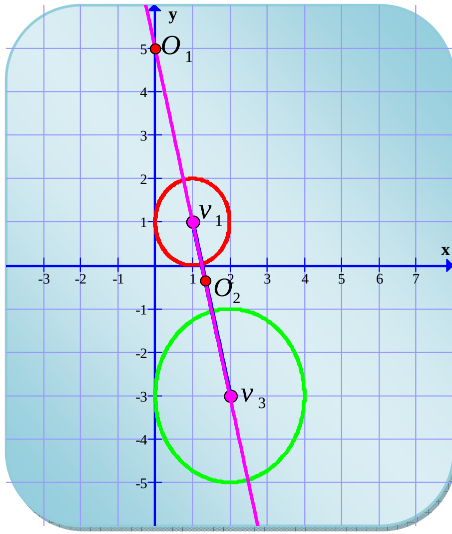
بما أن $R_3\neq R_1$ فإن C_3 صورة C_1 وفق تحاكٍ نسبته إما $k=\frac{R_3}{R_1}=2$ أو $k=-\frac{R_3}{R_1}=-2$

ولتعين مركزه نعتبر $v_3(2,-3)$ صورة $v_1(1,1)$ بهذا التحاكي ومن $\begin{bmatrix} x'-x_0 \\ y'-y_0 \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}$

حالة $k=\frac{R_3}{R_1}=2$ نجد $\begin{bmatrix} 2-x_0 \\ -3-y_0 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 1-x_0 \\ 1-y_0 \end{bmatrix}$

ومنه $\begin{cases} 2-x_0 = 2(1-x_0) \\ -3-y_0 = 2(1-y_0) \end{cases}$

مركز التحاكي $O_1(0,5)$



حالة $k = -\frac{R_3}{R_1} = -2$ نجد $\begin{bmatrix} 2-x_0 \\ -3-y_0 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1-x_0 \\ 1-y_0 \end{bmatrix}$

ومنه $\begin{cases} 2-x_0 = -2(1-x_0) \\ -3-y_0 = -2(1-y_0) \end{cases}$

مركز التحاكي $O_2(\frac{4}{3},-\frac{1}{3})$

مسألة: لدينا الدوائر الثلاثة

$$C_1 : x^2 + y^2 - 2x = 0$$
$$C_2 : (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$$
$$C_3 : x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$$

والمستقيم $\Delta : \ 3x - 4y - 15 = 0$ والنقطة $M(1,1)$ والمطلوب

① ادرس الوضع النسبي للنقطة $M(1,1)$ بالنسبة لكل دائرة من الدوائر المفروضة

② ادرس الوضع النسبي للمستقيم $\Delta : \ 3x - 4y - 15 = 0$ بالنسبة لكل دائرة من الدوائر المفروضة

وفي حالة التماس أوجد نقطة التماس

③ ادرس الوضع النسبي للدائرة C_1 مع الدائرة C_2 وكذلك الوضع النسبي للدائرة C_1 مع الدائرة C_3

وأيضاً الوضع النسبي للدائرة C_3 مع الدائرة C_2 وهل يوجد بين هذه الدوائر دائرتين متعامدتين؟

④ أوجد المماسان للدائرة C_3 العمودان على Δ وعين نقط التماس

⑤ تحقق أن النقطة $N(-5,-3)$ تنتمي للدائرة C_3 وأوجد معادلة d_1 المستقيم المماس لها في N ثم أوجد مستقيم

مماس أخر d_2 يوازي d_1

⑥ بين أن C_3 صورة C_1 بتحاكٍ عين مركزه

⑦ أوجد C_4 صورة C_1 بدوران مركزه $M(1,1)$ زاويته $\theta = \frac{\pi}{4}$

الحل:

① تكتب C_1 بالصيغة القياسية $C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 1$ تكون عناصر C_1 : $v_1(1,0) \quad , \quad R_1 = 1$

عناصر C_2 : $v_2(1,-3) \quad , \quad R_2 = 2$

تكتب C_1 بالصيغة القياسية $C_3 : (x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$ تكون عناصر C_3 :

$R_3 = 5 \quad , \quad v_3(-2,1)$

$M \in C_1$ إذاً $v_1M = \sqrt{(1-1)^2 + (1-0)^2} = 1 = R_1$

C_2 خارج الدائرة M إذاً $v_2M = \sqrt{(1-1)^2 + (1+3)^2} = 4 > R_2$

C_3 داخل الدائرة M إذاً $v_3M = \sqrt{(1+1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2} < R_3$

② قانون بعد نقطة عن مستقيم $L_A = \frac{|a\,x_A + b\,y_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ، $\Delta: \quad 3x - 4y - 15 = 0$

C_1 المستقيم Δ لا يقطع الدائرة $L_{v_1} = \frac{|3-0-15|}{\sqrt{9+16}} = \frac{12}{5} > R_1$ ، $v_1(1,0)$

المستقيم Δ يقطع الدائرة C_2 ويمر من مركزها $L_{v_2} = \frac{|3+12-15|}{\sqrt{9+16}} = 0 > R_2$ ، $v_2(1,-3)$

C_3 المستقيم Δمماس للدائرة $L_{v_3} = \frac{|-6-4-15|}{\sqrt{9+16}} = 5 = R_3$ ، $v_3(-2,1)$

③ ★ وضع C_1 مع C_2 : $v_1(1,0) \quad , \quad R_1 = 1$ ، $v_2(1,-3) \quad , \quad R_2 = 2$

$v_1v_2 = 3 = R_1 + R_2$ ، $v_1v_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

إذاً C_1 و C_2 متماستان خارجاً

★وضع C_1 مع C_3 : $v_1(1,0) \quad , \quad R_1 = 1$ ، $v_3(-2,1) \quad , \quad R_3 = 5$

$|R_1 - R_2| = 4 > v_1v_2$ ، $v_1v_2 = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

إذاً C_1 و C_3 متباعدتان داخلاً $R_1 < R_2$ تكون C_1 داخل C_3

★ وضع C_2 مع C_3 : $v_2(1,-3) \quad , \quad R_2 = 2$ ، $v_3(-2,1) \quad , \quad R_3 = 5$

$|R_1 - R_2| = 3 \ , R_1 + R_2 = 7$ ، $v_1v_2 = \sqrt{9+16} = 5$

ومنه $R_1+R_2 > v_1v_2 > |R_1-R_2|$ إذاً C_1 و C_3 متقاطعتان بنقطتين

شرط لازم لتعامد دائرتين أن تكونا متقاطعتين في المسألة C_1 و C_3 متقاطعتان بنقطتين

لنتأكد من شرط التعامد $\overline{v_3v_2}^2 = R_3^2 + R_2^2$

$R_3^2 + R_2^2 = 29$, $\overline{v_3v_2}^2 = 25$ إذاً C_1 و C_3 غير متعامدتين

④ إيجاد المماسين للدائرة C_3 العمودان على Δ وتعين نقط التماس

من شرط تعامد مستقيمين $m = -\frac{1}{m_\Delta} = -\frac{4}{3}$

نشتق معادلة الدائرة $C_3 : (x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$ نجد $2(x+2) + 2(y-1)y'_x = 0$

نبدل $y'_x = m = -\frac{4}{3}$ نجد $(x+2) - \frac{4}{3}(y-1) = 0$ ومنه $(x+2) = \frac{4}{3}(y-1)........(1)$

نبدل (1) في الدائرة نجد $\frac{16}{9}(y-1)^2 + (y-1)^2 = 25$

ومنه $(y-1)^2 = 9$ لها حلان $y_1 = 4$, $y_2 = -2$ هي تراتيب نقط التماس نبدلها في (1)نجد فواصل نقط التماس $x_1 = 2$, $x_2 = -6$ نقط التماس : $N_1(2,4)$, $N_2(-6,-2)$

معادلة المماس في $N_1(2,4)$ هي $(y-4) = -\frac{4}{3}(x-2)$ أو $4x + 3y - 20 = 0$

ومعادلة المماس في $N_2(-6,-2)$ هي $(y+2) = -\frac{4}{3}(x+6)$ أو $4x + 3y + 30 = 0$

حل آخر : نكتب معادلة المستقيم المار من مركز الدائرة $v_3(-2,1)$ ويوازي Δ

معادلته من الشكل $y - 1 = \frac{3}{4}(x+2)$ وهو يقطع الدائرة في نقطتي التماس

بالتعويض في $C_3 : (x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$

نجد $(x+2)^2 + \frac{9}{16}(x+2)^2 = 25$ ومنه $(x+2)^2 = 16$ حلولها $x_1 = 2$, $x_2 = -6$

نبدل في المستقيم نجد $y_1=4\ ,\ y_2=-2$

نقط التماس : $N_1(2,4)\quad ,\quad N_2(-6,-2)$

معادلة المماس في $N_1(2,4)$ هي $(y-4)=-\frac{4}{3}(x-2)$ أو $4x+3y-20=0$

ومعادلة المماس في $N_2(-6,-2)$ هي $(y+2)=-\frac{4}{3}(x+6)$ أو $4x+3y+30=0$

حل ثالث : المماس يعامد $\Delta:\ \ 3x-4y-15=0$ فهو من الشكل

$4x+3y+h=0$

بعد $v_3(-2,1)$ عن هذا المماس يساوي $R_3=5$

ومنه $\frac{|-8+3+h|}{\sqrt{16+9}}=5$ أي $|h-5|=25$ لها حلان $h_1=-20\ ,\ h_2=30$ بالتعويض نجد المماسان

$4x+3y-20=0$ و $4x+3y+30=0$ وبحل كل منهما مع الدائرة نجد نقط التماس

$N_1(2,4)\quad ,\quad N_2(-6,-2)$

⑤ نبدل النقطة $N(-5,-3)$ في معادلة الدائرة $C_3:(x+2)^2+(y-1)^2=25$ نجد

$(-5+2)^2+(-3-1)^2=25$ محققة فالنقطة $N(-5,-3)$ تنتمي للدائرة C_3

بفرض $P(x,y)$ نقطة من المماس في $N(-5,-3)$ فإن $(v_3N)\perp(PN)$ ومنه $\overrightarrow{Nv_3}\cdot\overrightarrow{NP}=0$

لكن $\overrightarrow{Nv_3}=3\vec{i}+4\vec{j}\ \ ,\ \ \overrightarrow{NP}=(x+5)\vec{i}+(y+3)\vec{j}$

ومنه معادلة المماس في $N(-5,-3)$ هو $3(x+5)+4(y+3)=0$ أو $d_1:3x+4y+27=0$

المماس الآخر الموازي d_1 هو نظيره بالنسبة لمركز الدائرة دساتير التناظر

$\begin{cases}x'=2x_0-x\\ y'=2y_0-y\end{cases}$ أي $\begin{cases}x'=-4-x\\ y'=2-y\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}x=-4-x'\\ y=2-y'\end{cases}$ نبدل في $d_1:3x+4y+27=0$

نجد $d_2:3(-4-x')+4(2-y')+27=0$ بالإصلاح نجد $d_2:3x+4y-24=0$

⑥ بين أن C_3 صورة C_1 بتحاكٍ عين مركزه

بما أن $R_1 = 1$, $R_3 = 5$ أي $R_3 \neq R_1$ فإن C_3 صورة C_1 بتحاكٍ نسبته k حيث $|k| = \frac{R_3}{R_1} = 5$

$\begin{bmatrix} x' - x_0 \\ y' - y_0 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$ و $v_3(-2,1)$ صورة $v_1(1,0)$ بهذا التحاكي

عندما $k = 5$ فإن $\begin{bmatrix} -2 - x_0 \\ 1 - y_0 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 - x_0 \\ 0 - y_0 \end{bmatrix}$ مركز التحاكي $O_1(\frac{7}{4}, -\frac{1}{4})$

عندما $k = -5$ فإن $\begin{bmatrix} -2 - x_0 \\ 1 - y_0 \end{bmatrix} = -5 \begin{bmatrix} 1 - x_0 \\ 0 - y_0 \end{bmatrix}$ مركز التحاكي $O_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$

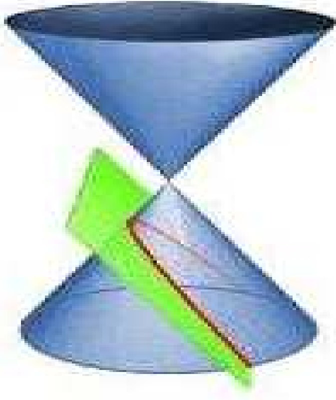
⑦ أوجد C_4 صورة C_1 بدوران مركزه $M(1,1)$ زاويته $\theta = \frac{\pi}{4}$

$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\theta - (y - y_0)\sin\theta + x_0 \\ y' = (x - x_0)\sin\theta + (y - y_0)\cos\theta + y_0 \end{cases}$ بما أن $v_4(x', y')$ صورة $v_1(1,0)$ بهذا الدوران

$$\begin{cases} x' = (1-1)\cos\frac{\pi}{4} - (0-1)\sin\frac{\pi}{4} + 1 \\ y' = (1-1)\sin\frac{\pi}{4} + (0-1)\cos\frac{\pi}{4} + 1 \end{cases}$$ ومنه $$\begin{cases} x' = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$R_4 = R_1$ ومنه $C_4 : \left(x - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$

الفصل التّاسع القطع المكافئ



وجدنا أن القطع المكافئ هو أحد مقاطع السطح المخروطي

ولكل هذه المقاطع صفة مشتركة

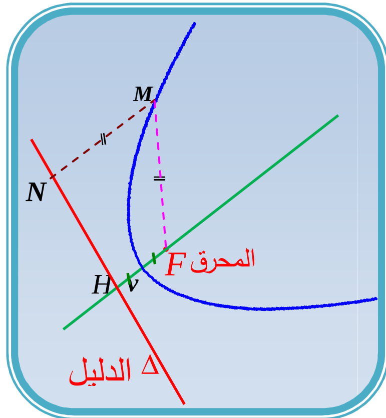
وهي مجموعة نقط في مستوٍ واحد وهو نسبة بعد كل منها عن نقطة ثابتة

في المستوي إلى بعدها عن مستقيم ثابت من نفس المستوي

يساوي الاختلاف المركزي والذي يساوي الواحد في القطع المكافئ

ويقع القطع في مستوٍ يوازي أحد مولدات السطح المخروطي

أولاً:تعريف:



ليكن Δ مستقيماً ثابتاً ، F نقطة ثابتة

لا تنتمي إلى Δ تعيّنان المستوي (κ)

القطع المكافئ: هو مجموعة نقاط المستوي (κ)

التي بعد كل منها عن F يساوي بعدها عن Δ .

أو القطع المكافئ :هو مجموعة نقاط المستوي (κ)

التي نسبة بعد كل منها عن F إلى بعدها عن Δ يساوي 1.

ثانياً: ملاحظات

❶ إذا رمزنا $\mathcal{P}$ مجموعة نقط القطع المكافئ

وبفرض M نقطة من القطع و N مسقطها القائم على Δ

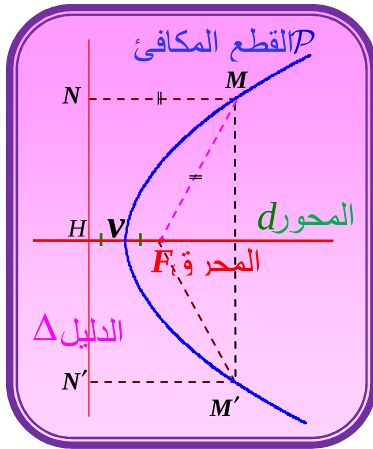
عندئذٍ $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow MF = MN$

❷تسمّى النّقطة F مِحرق القطع المُكافِئ.

❸يُسمّى المستقيم الثّابت Δ دليل القطع المُكافِئ.

❹تسمّى النّقطة v الواقعة في منتصف المسافة بين المحرق والدليل رأس القطع المُكافِئ.

❺للقطع المكافئ محور تناظر



هو d المستقيم المار من F وعمود على Δ

بفرض M' نظيرة M بالنّسبة إلى المستقيم d

و N' مرتسم M' على Δ

(حسب خواص التناظر وهو تقايس)

نجد $M'F = M'N'$ ومنه: $M' \in \mathcal{P}$

ملاحظة: يمكن رسم قوس القطع المُكافِئ بمعرفة رأس القطع ونقطتين منه

① نعيّن المحرق Fوالرأس v ونرسم الدّليل Δ في المستوي (κ).

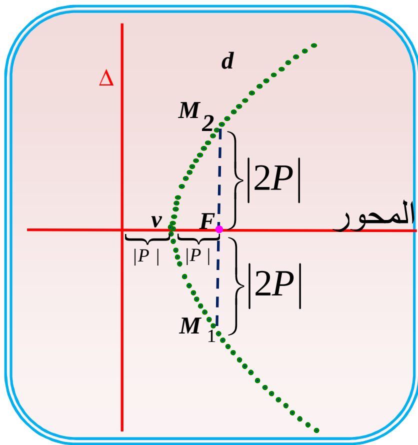
② نرسم الوتر المحرقي الأساسي $[M_2M_1]$

(وهو وتر يمر بالمحرق ويوازي الدليل وطوله $|4P|$)

نرسم من F مستقيماً d عمودياّ على محور القطع

ثُمَّ نعيّن عليه النّقطتين M_2, M_1 بجهتين مختلفتين من المحور

بحيث يكون: $M_1F = M_2F = |2P|$



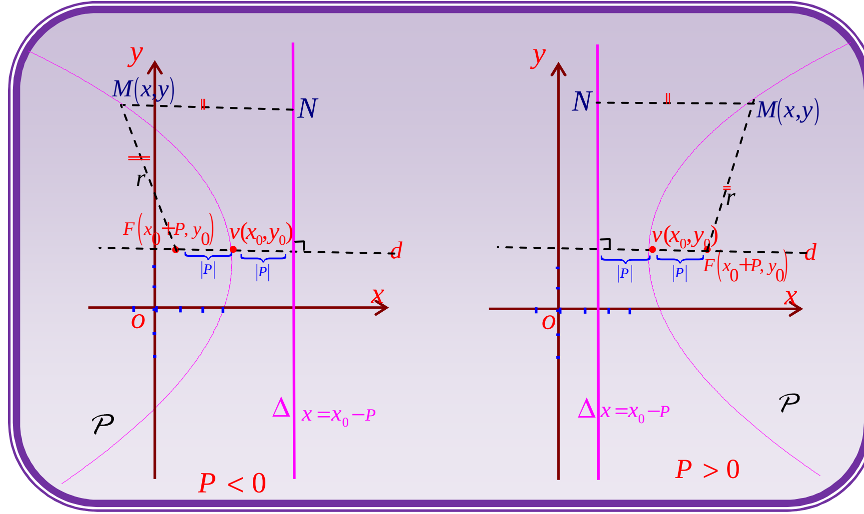
③ نرسم قوس القطع الذي يمر من النّقط الثّلاثة M_2, O, M_1 ، كما في الشكل

الدراسة التحليلية للقطع المكافئ

في دراستنا التحليلية سنعتبر أنّ محور القطع يوازي أحد محوريّ الإحداثيات

الصيغة القياسية لمعادلة القطع المكافئ:

أولاً: محور القطع يوازي محور الفواصل



إذا رمزنا لرأس القطع $V(x_0,y_0)$ ولدينا بعد المحرق عن الدليل $|2P|$ ومحور القطع يوازي $x'x$

فإن معادلة الدليل $\Delta : x = x_0 - P$ وإحداثيات المحرق $F(x_0+P,y_0)$

بفرض أن $M(x,y) \in \mathcal{P}$ و N مسقط M على الدليل Δ

حسب تعريف القطع $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow MF = MN$

تكتب العلاقة تحليلياً $\sqrt{(x-x_0-P)^2+(y-y_0)^2} = |x-x_0+P|$

بتربيع الطّرفين $(x-x_0-P)^2+(y-y_0)^2 = (x-x_0+P)^2$

$$(y-y_0)^2 = (x-x_0+P)^2-(x-x_0-P)^2$$
$$(y-y_0)^2 = (2x-2x_0)(2P)$$
$$(y-y_0)^2 = 4P(x-x_0)$$

نسمي المعادلة

$(y-y_0)^2=4P(x-x_0)$ الصّيغة القياسيّة لمعادلة قطع مكافئ محوره يوازي محور الفواصل

نّتائج المعادلة $(y-y_0)^2=4P(x-x_0)$:

① محور القطع يوازي المحور $x'x$ ومعادلة المحور $y=y_0$

② إحداثيات الرّأس $v(x_0,y_0)$ وإحداثيات المحرق $F(x_0+P,y_0)$

③ معادلة الدليل $\Delta: x=x_0-P$

④ عندما يكون $P>0$ القطع مفتوح نحو اليمين وعندما يكون $P<0$ القطع مفتوح نحو اليسار

⑤ يمكن تمثيل هذا القطع وسيطياً نفرض $y-y_0=t$ نبدل في القطع نجد $t^2=4P(x-x_0)$

ومنه $: t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=\dfrac{1}{4P}t^2+x_0 \\ y=t+y_0 \end{cases}$ نعتبره تمثيلاً وسيطيّاً للقطع المكافئ الذي محوره يوازي $x'x$

⑥ الصّيغة العامّة لمعادلة لقطع مكافئ محوره يوازي المحور $x'x$:

إذا نشرنا المعادلة $(y-y_0)^2=4P(x-x_0)$ نجد معادلة نجد

$$\begin{aligned} &(y-y_0)^2=4P(x-x_0) \\ &y^2-2y_0y+y_0^2=4Px-4Px_0 \\ &x=\left(\frac{1}{4P}\right)y^2+\left(-\frac{y_0}{2P}\right)y+\left(\frac{1}{4P}y_0^2+x_0\right) \end{aligned}$$

إذا فرضنا $c=\dfrac{1}{4P}y_0^2+x_0$, $b=-\dfrac{y_0}{2P}$, $a=\dfrac{1}{4P}$

نجد المعادلة $x=ay^2+by+c$

والتي نسميها الصّيغة العامّة لمعادلة قطع مكافئ محوره يوازي المحور $x'x$

وللانتقال من هذه المعادلة إلى الصّيغة القياسية نتمم إلى مربع كامل

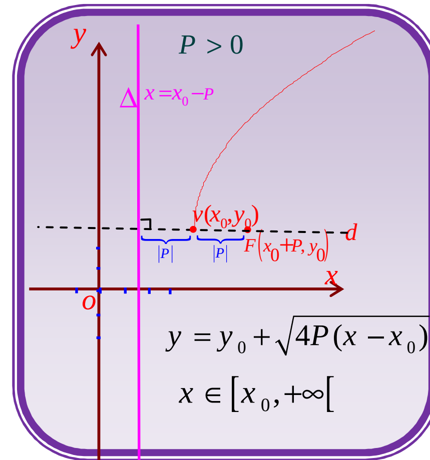
⑦ القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الفواصل اجتماع دالتين

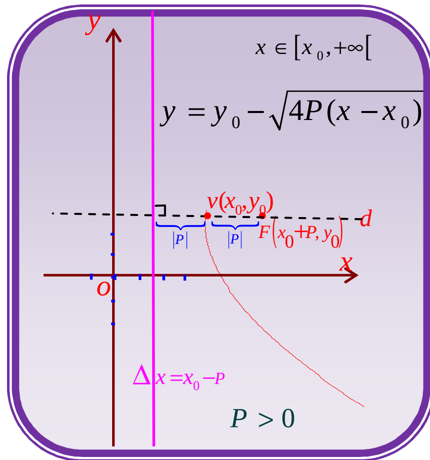
أحد الدالتين خطها البياني فوق محور القطع والأخرى خطها البياني تحت محور القطع

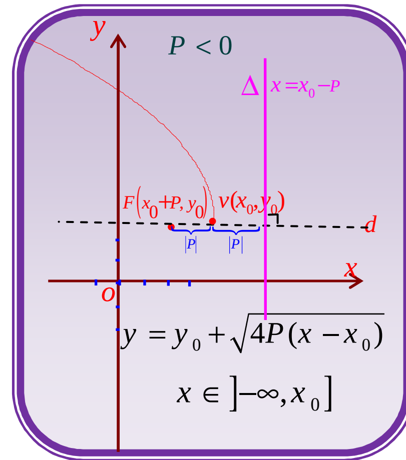
معادلة القطع $(y-y_0)^2=4P(x-x_0)$ إذا جذرنا الطرفين $y-y_0=\pm\sqrt{4P(x-x_0)}$

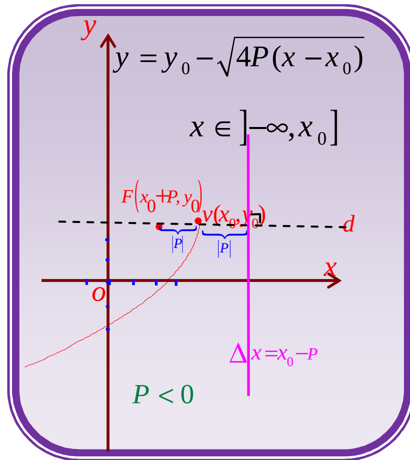
إذا كان $P>0$ مجموعة التعريف $[x_0,+\infty[$ وإذا كان $P<0$ مجموعة التعريف $]-\infty,x_0]$

وتتخذ الأشكال الآتية:





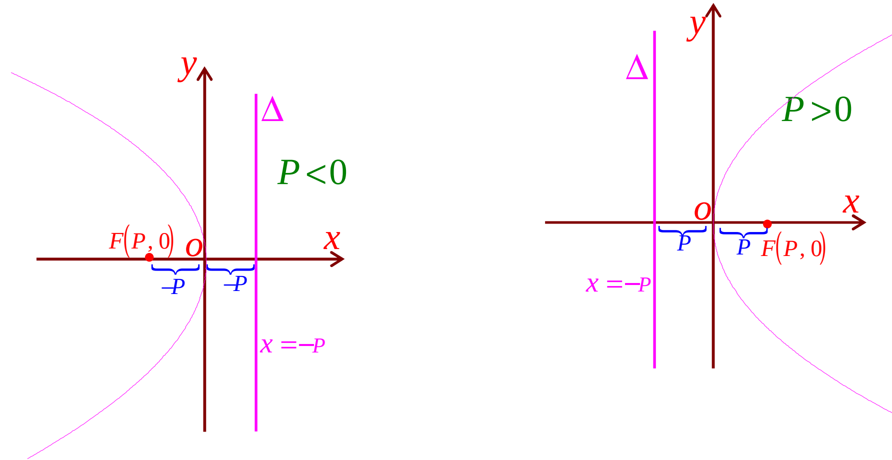




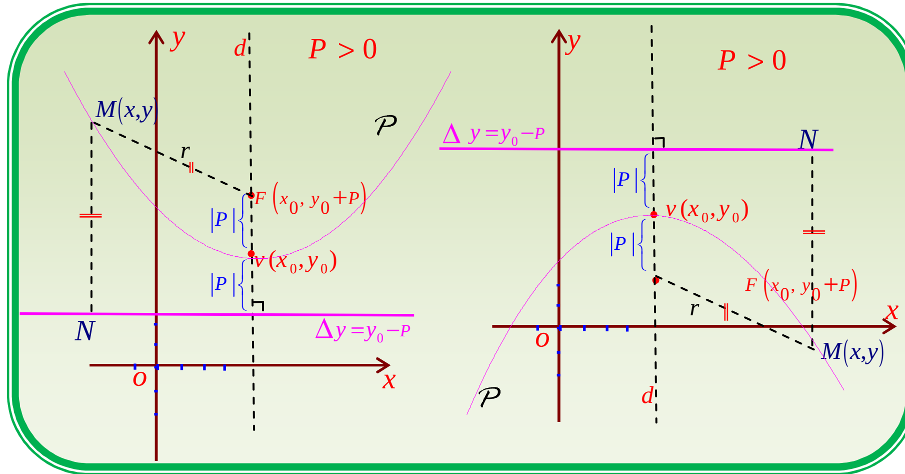
نتيجة **كل دالة** $y = c + h\sqrt{ax+b}$ حيث c,h,a,b أعداد حقيقية وكل من $h \cdot a \neq 0$.

ملاحظة : في الحالة الخاصّة إذا كان محور القطع المكافئ هو $x'x$ ورأس القطع $O(0,0)$

فإن معادلته $y^2 = 4Px$ ومحرقه $F(P,0)$ ودليله $\Delta : x = -P$



ثانياً: محور القطع يوازي محور التراتيب



إذا رمزنا لرأس القطع $V(x_0, y_0)$ ولدينا بعد المحرق عن الدليل $|2P|$ ومحور القطع يوازي $y\acute{y}$

فإن معادلة الدليل $\Delta : y = y_0 - P$ وإحداثيات المحرق $F(x_0, y_0 + P)$

بفرض $M(x, y) \in \mathcal{P}$ و N مسقط M على الدليل Δ

حسب تعريف القطع $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow MF = MN$

تكتب العلاقة تحليلياً $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0 - P)^2} = |y - y_0 + P|$

بتربيع الطرفين $(x - x_0)^2 + (y - y_0 - P)^2 = (y - y_0 + P)^2$

$$(x - x_0)^2 = (y - y_0 + P)^2 - (y - y_0 - P)^2$$
$$(x - x_0)^2 = (2y - 2y_0)(2P)$$
$$(x - x_0)^2 = 4P(y - y_0)$$

نسمي المعادلة

$(x - x_0)^2 = 4P(y - y_0)$ الصّيغة القياسية لمعادلة قطع مكافئ محوره يوازي المحور $y\acute{y}$

نتائج المعادلة $(x - x_0)^2 = 4P(y - y_0)$:

① محور القطع يوازي المحور $y\acute{y}$ ومعادلة المحور $x = x_0$

②إحداثيات الرّأس $v(x_0, y_0)$ وإحداثيات المحرق $F(x_0, y_0 + P)$

③معادلة دليله $\Delta : y = y_0 - P$

④عندما يكون $P > 0$ القطع مفتوح نحو الأعلى وعندما يكون $P < 0$ القطع مفتوح نحو الأسفل

⑤يمكن تمثيل هذا القطع وسيطياً نفرض $x - x_0 = t$ نبدل في القطع نجد $t^2 = 4P(y - y_0)$

ومنه $t \in \mathbb{R}:$ $\begin{cases} x = t + x_0 \\ y = \dfrac{1}{4P}t^2 + y_0 \end{cases}$ نعتبره تمثيلاً وسيطياً للقطع المكافئ الذي محوره يوازي $y\acute{y}$

⑥الصّيغة العامّة لمعادلة لقطع مكافئ محوره يوازي المحور $y\acute{y}$:

إذا نشرنا المعادلة $(x - x_0)^2 = 4P(y - y_0)$ نجد معادلة نجد

$$(x - x_0)^2 = 4P(y - y_0)$$
$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 = 4Py - 4Py_0$$
$$y = \left(\frac{1}{4P}\right)x^2 + \left(-\frac{x_0}{2P}\right)x + \left(\frac{1}{4P}x_0^2 + y_0\right)$$

إذا فرضنا $c = \frac{1}{4P}x_0^2 + y_0$, $b = -\frac{x_0}{2P}$, $a = \frac{1}{4P}$

نجد المعادلة $y = ax^2 + bx + c$

والتي نسميها الصّيغة العامّة لمعادلة قطع مكافئ محوره يوازي المحور $y\acute{y}$

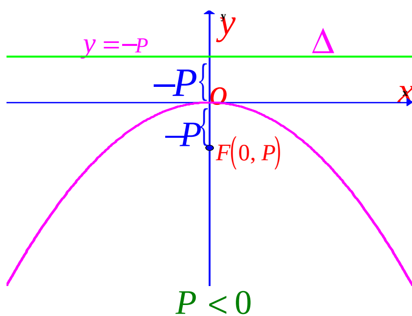
وللانتقال من هذه المعادلة إلى الصّيغة القياسيّة نتمّم إلى مربّع كامل

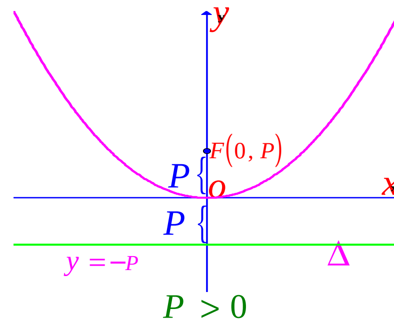
ملاحظة : الخط البياني لكل دالة حدودية من الدّرجة الثّانية $f(x) = ax^2 + bx + c$

هو قطع مكافئ محوره المحرقي يوازي محور التراتيب $y\acute{y}$

ملاحظة : إذا كان محور القطع المكافئ هو $y\acute{y}$ ورأس القطع $O(0,0)$

فإن معادلته $x^2 = 4Py$ ومحرقه $F(0,P)$ ودليله $\Delta : y = -P$





تمارين(1)

عيّن الرأس، والمحور، وجهة فتحة القطع، والمحرق، ومعادلة الدّليل

وارسم كلٍ من القطوع المُكافِئة التي معادلة كل منها:

① $y^2 = 4x$ ② $y^2 + 4x = 0$

③ $x^2 - 4y = 0$ ④ $x^2 = -4y$

الحل: كما في الجدول

الحالة	$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_3$	$\mathcal{P}_4$
المعادلة	$y^2 = 4x$	$y^2 = -4x$	$x^2 = 4y$	$x^2 = -4y$
الشّكل	$y^2 = 4Px$	$y^2 = 4Px$	$x^2 = 4Py$	$x^2 = 4Py$
الذّروة	$O(0,0)$	$O(0,0)$	$O(0,0)$	$O(0,0)$
المحور	$x'x$	$x'x$	$y'y$	$y'y$
جهة فتحة القطع	$P > 0$ نحو ox^+	$P < 0$ نحو ox^-	$P > 0$ نحو oy^+	$P < 0$ نحو oy^-
المحرق	$F(1,0)$	$F(-1,0)$	$F(0,1)$	$F(0,-1)$

تمارين (2)

عيّن الرأس، المحور ، جهة فتحة القطع، المحرق، معادلة الدّليل

وارسم كلٍ من القطوع المُكافِئة التي معادلة كل منها:

① $y^2=4(x-2)$ ② $(y+1)^2=-6(x-2)$

③ $(x+2)^2=8(y+1)$ ④ $(x-1)^2=-4(y+2)$

الحل: كما في الجدول

الحالة	$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_3$	$\mathcal{P}_4$
المعادلة	$y^2=4(x-3)$	$(y+1)^2=-6(x-2)$	$(x+2)^2=8(y+1)$	$(x-1)^2=-4(y+2)$
الشّكل	$(y-y_0)^2=4P(x-x_0)$	$(y-y_0)^2=4P(x-x_0)$	$(x-x_0)^2=4P(y-y_0)$	$(x-x_0)^2=4P(y-y_0)$
الذّروة	$v\,(3,0)$	$v\,(2,-1)$	$v\,(-2,-1)$	$v\,(1,-2)$
المحور	يوازي $x'x$	يوازي $x'x$	يوازي $y'y$	يوازي $y'y$
جهة فتحة القطع	$P=1>0$ نحو ox^+	$P=-\frac{3}{2}<0$ نحو ox^-	$P=2>0$ نحو oy^+	$P=-1<0$ نحو oy^-
المحرق	$F\,(4,0)$	$F\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$F\,(-2,1)$	$F\,(1,-3)$
معادلة الدّليل	$x=-2$	$x=\frac{7}{2}$	$y=-3$	$y=-1$

تمارين (3): أوجد معادلة كل قطع مُكافِئ إذا علمت أنّ:

❶ الرّأس $v\,(2,1)$، دليله المحور $y\acute{y}$

❷ الرّأس $v\,(1,-2)$ والمحرق $F\,(1,4)$

❸ المحرق $F\,(-1,1)$ ، الدليل $\Delta : y = 3$

❹ يمر من المبدأ $O\,(0,0)$ ومن النقطة $M\,(-3,-2)$ معادلة محوره $y = 2$

❺ محوره يوازي $y\acute{y}$ يمر من النقاط $M_1(2,3)$ ، $M_2(-2,-1)$ ، $M_3(-4,0)$

❻ محوره $x\acute{x}$ دليله $y\acute{y}$ ويمر القطع من $M\,(5,4)$

❼ محوره يوازي $x\acute{x}$ ذروته على المستقيم $x + y + 3 = 0$ ويمر القطع

من مبدأ الإحداثيات $O\,(0,0)$ ومن النقطة $M\,(3,2)$

❽ محور القطع يوازي أحد محوري الإحداثيات يمر القطع من المبدأ $O\,(0,0)$

ويمس المستقيم $x - y + 4 = 0$ عند نقطة تقاطعه مع المحور $y\acute{y}$

❾ القطع يمس المستقيم $y = 1$ في الرّأس ويمر من النّقطتين $N\,(-2,-3)$ و $M\,(4,0)$

الحل:

❶ الرّأس $v\,(2,1)$، دليله المحور $y\acute{y}$

معادلة الدليل $x = 0$ والدليل $x = x_0 - P$ والمعادلة القياسية $(y - y_0)^2 = 4P(x - x_0)$

ولدينا $x_0 = 2$ بالتعويض في معادلة الدليل نجد $0 = 2 - P$ ومنه $P = 2$

المعادلة المطلوبة $(y-1)^2 = 8(x-2)$

❷ الرّأس $v\,(1,-2)$ والمحرق $F\,(1,4)$

$x_F = x_v$ محور القطع يوازي المحور $y\acute{y}$ والصّيغة القياسيّة للمعادلة $(x-x_0)^2 = 4P(y-y_0)$

$y_F = y_0 + P$ ولدينا من الرّأس $y_0 = -2$ بالتّعويض $4 = -2 + P$ ومنه $P = 6$

المعادلة المطلوبة $(x-1)^2 = 24(y+2)$

❸ المحرق $F(-1,1)$ ، الدليل $\Delta : y = 3$

$\Delta : y = 3$ الدليل يوازي المحور $x\acute{x}$ فمحور القطع يوازي المحور $y\acute{y}$

والصّيغة القياسيّة للمعادلة $(x-x_0)^2 = 4P(y-y_0)$

$x_F = x_0 = -1$ و $y_F = y_0 + P$ و $y_\Delta = y_0 - P$

أي $1 = y_0 + P....(1)$ و $3 = y_0 - P.....(2)$

بجمع المعادلتين $4 = 2y_0$ ومنه $y_0 = 2$ بالتعويض في (1) نجد $P = -1$

المعادلة المطلوبة $(x+1)^2 = -4(y-2)$

حل آخر : حسب تعريف القطع $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow MF = MN$

حيث $M(x,y) \in \mathcal{P}$ و N مسقط M على الدليل Δ تكتب العلاقة تحليلياً

$\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = |y-3|$ بتربيع الطرفين

$$(x+1)^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 - 6y + 9$$
$$(x+1)^2 = -4y + 8$$
$$(x+1)^2 = -4(y-2)$$

❹ يمر من المبدأ $O(0,0)$ ومن النقطة $M(-3,-2)$ معادلة محوره $y = 2$

محور القطع $y = 2$ فهو يوازي المحور $x\acute{x}$ والرّأس على محور القطع $y_0 = 2$

الصّيغة القياسيّة للمعادلة $(y-y_0)^2 = 4P(x-x_0)$ نعوض $y_0 = 2$ نجد

$(y-2)^2=4P(x-x_0)$

$O(0,0)\in\mathcal{P}$ تحقق معادلته نعوضها في المعادلة نجد $4=-4Px_0$.......(1)

$M(-3,-2)\in\mathcal{P}$ تحقق معادلته نعوضها في المعادلة نجد $(-2-2)^2=4P(-3-x_0)$

أي $16=-12P-4Px_0$...........(2)

نعوض (1)في (2) نجد $12=-12P$ ومنه $P=-1$ ومن (1) نجد $x_0=1$

المعادلة المطلوبة $(y-2)^2=-4(x-1)$

❺ محوره يوازي $y\acute{y}$ يمر من النقاط $M_1(2,3)$ ، $M_2(-2,-1)$ ، $M_3(-4,0)$

نختار الصّيغة العامة $y=ax^2+bx+c$

القطع يمر من النّقاط الثّلاثة فهي تحقق المعادلة

$M_1(2,3)\in\mathcal{P}$ نجد $3=4a+2b+c$....①

$M_2(-2,-1)\in\mathcal{P}$ نجد $-1=4a-2b+c$....②

$M_3(-4,0)\in\mathcal{P}$ نجد $0=16a-4b+c$....③

بطرح ② من ① نجد $4=4b$ ومنه $b=1$

بطرح ③ من ① نجد $3=-12a+6b$ نعوض $b=1$ نجد $a=\frac{1}{4}$

نعوض في ① نجد $3=4+2+c$ ومنه $c=-3$

معادلة القطع $y=\frac{1}{4}x^2+x-3$

❻ محوره $x\acute{x}$ دليله $y\acute{y}$ ويمر القطع من $M(5,4)$

محوره $x\acute{x}$ والذروة تقع على المحور $y_0=0$ الصّيغة القياسيّة لمعادلة القطع $y^2=4P(x-x_0)$

$M(5,4)\in\mathcal{P}$ نجد $16=P(5-x_0)$ أو $4=P(5-x_0)$.....①

دليله $y\acute{y}$ معادلته $x=0$ ولكن معادلته القياسيّة $x=x_0-P$ ومنه $0=x_0-P$

أي $x_0=P$......②

نعوض ② في ① نجد $4=P(5-P)$ أو $P^2-5P+4=0$

تكتب $(P-1)(P-4)=0$ أما ($P=1$ ومنه $x_0=1$)أو ($P=4$ ومنه $x_0=4$)

للمسألة حلين معادلة القطع الأول $y^2=4(x-1)$ و معادلة القطع الثّاني $y^2=16(x-4)$

❼ محوره يوازي $x\acute{x}$ الرّأس على المستقيم $x+y+3=0$ ويمر القطع من مبدأ الإحداثيات $O(0,0)$ومن النقطة $M(3,2)$

محوره يوازي $x\acute{x}$ الصّيغة القياسيّة لمعادلة القطع $(y-y_0)^2=4P(x-x_0)$

الرّأس على المستّقيم $x+y+3=0$ فهي تحقق معادلته أي $x_0+y_0+3=0$.....①

$O(0,0)\in\mathcal{P}$ تحقق معادلته نعوضها في المعادلة نجد $y_0^2=-4Px_0$.......②

$M(3,2)\in\mathcal{P}$ تحقق معادلته نعوضها في المعادلة نجد $(2-y_0)^2=4P(3-x_0)$ أو

$4-4y_0+y_0^2=12P-4Px_0$.......③

بطرح ②من ③ نجد $4-4y_0=12P$ أو $P=\frac{1}{3}(1-y_0)$.....④

من ① كالآتي $x_0=-3-y_0$.....①

نعوض ① و ④ في ② نجد $y_0^2=-\frac{4}{3}(1-y_0)(-3-y_0)$ بالإصلاح نجد

$$3y_0^2=12-12y_0+4y_0-4y_0^2$$
$$7y_0^2+8y_0-12=0$$

مميز المعادلة $\Delta=84-4(7)(-12)=400$

إما $y_0=\frac{-8+20}{14}=\frac{6}{7}$ أو $y_0=\frac{-8-20}{14}=-2$

عندما $y_0=-2$ من ① نجد $x_0=-1$ ومن ④ نجد $P=1$ ومعادلة القطع $(y+2)^2=4(x+1)$

عندما $y_0=\frac{6}{7}$ من ① نجد $x_0=-\frac{27}{7}$ ومن ④ نجد $P=\frac{1}{21}$ ومعادلة القطع $\left(y-\frac{6}{7}\right)^2=\frac{4}{21}\left(x+\frac{27}{7}\right)$

❽ محور القطع يوازي أحد محوري الإحداثيات يمر القطع من المبدأ $O(0,0)$ ويمس المستقيم

$x-y+4=0$

عند نقطة تقاطعه مع المحور $y\acute{y}$

المستقيم $x-y+4=0$ يقطع المحور $y\acute{y}$ عند النقطة $N(0,4)$

محور القطع يوازي أحد محوري الإحداثيات يمر القطع من المبدأ $O(0,0)$ ومن $N(0,4)$ لهما نفس الفاصلة

محور القطع يوازي محور الفواصل $x\acute{x}$ والصّيغة القياسيّة لمعادلة القطع $\mathcal{P}:(y-y_0)^2=4P(x-x_0)$

$O(0,0)\in\mathcal{P}$ تحقق معادلته نعوضها في المعادلة نجد $y_0^2=-4Px_0$.......①

$N(0,4)\in\mathcal{P}$ تحقق معادلته نعوضها في المعادلة نجد$(4-y_0)^2=-4Px_0$.......②

المستقيم $x-y+4=0$ يمسّ القطع عند النّقطة $N(0,4)$ فإن $y'_x=m=1$ عند النّقطة $N(0,4)$

نشتق المعادلة $\mathcal{P}:(y-y_0)^2=4P(x-x_0)$ بالنّسبة إلى x نجد

$2(y-y_0)y'_x=4P$ نعوض $2(4-y_0)(1)=4P$ ومنه $4-y_0=2P$.......③

بطرح ①من ② نجد $(4-y_0)^2-y_0^2=0$ ومنها $y_0=2$ بالتّعويض في③ نجد $P=1$

ونعوضهما في ① نجد $x_0=-1$

المعادلة المطلوبة $(y-2)^2=4(x+1)$

❾ القطع يمسّ المستّقيم $y=1$ في الرّأس ويمر من النّقطتيّن $N(-2,-3)$ و $M(4,0)$

مماس القطع في الرّأس عمود على المحور فمحور القطع يوازي $y\acute{y}$ والصّيغة القياسيّة لمعادلة القطع

$\mathcal{P}:(x-x_0)^2=4P(y-y_0)$ و الرّأس يقع على المماس يكون $y_0=1$ نبدل في المعادلة نجد

$(x-x_0)^2=4P(y-1)$

$N(-2,-3)\in\mathcal{P}$ تحقق معادلته نعوضها في المعادلة نجد $(-2-x_0)^2=4P(-3-1)$

بالإصلاح $(-2-x_0)^2=-16P$.....①

$M(4,0)\in\mathcal{P}$ تحقق معادلته نعوضها في المعادلة نجد $(4-x_0)^2=4P(0-1)$

بالإصلاح $(4-x_0)^2=-4P$.....②

نبدل ② في ① نجد $(-2-x_0)^2=4(4-x_0)^2$ بالإصلاح

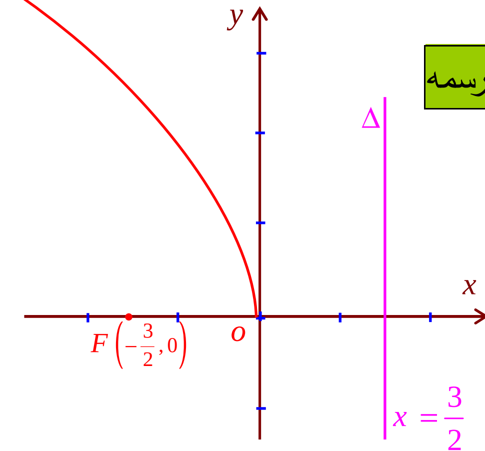
$$3x_0^2-36x_0+60=0$$
$$x_0^2-12x_0+20=0$$
$$(x_0-2)(x_0-10)=0$$

إما $x_0=2$ نبدل في ② نجد $P=-1$ والمعادلة الموافقة $\mathcal{P}_1:(x-2)^2=-4(y-1)$

أو $x_0=10$ نبدل في ② نجد $P=-9$ والمعادلة الموافقة $\mathcal{P}_2:(x-10)^2=-36(y-1)$

القطع المكافئ والدوال :

وجدنا أنّ كل دالة $y=c+h\sqrt{ax+b}$ حيث c,h,a,b أعداد حقيقية وكل من $h\cdot a\neq 0$.



تمرين(1): عين المنحنى الذي تمثله المعادلة $y=\sqrt{-6x}$ ثُمّ ارسمه

الحل:

المعادلة معرفة عندما $(-6x\geq 0 \quad , \quad y\geq 0)$ وبالتّالي:

❶ ... $(x\leq 0 \quad , \quad y\geq 0)$

وبتربيع طرفي المعادلة نجد: ❷... $y^2=-6x$

وهي معادلة قطع مُكافِئ من الشّكل $y^2=4Px$ محوره $x'x$

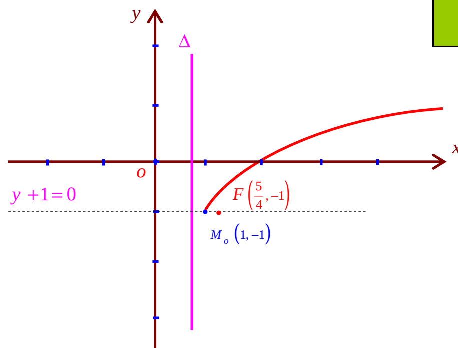
ورأسه $O(0,0)$ ، $4P=-6$ ومنه $P=-\frac{3}{2}$ نحو $x'x$ السّالبة

ومحرقه $F(-P,0)=F\left(-\frac{3}{2},0\right)$ ودليله $\Delta: x=P$ أي $x=\frac{3}{2}$

من ❶ و ❷ نجد أنّ المعادلة $y=\sqrt{-6x}$ تمثل جزء القطع المُكافِئ الواقع في الرّبع الثّاني.

تمرين(2):

بـيّن أيّـة منحنــي تمثلــه المعادلــة $y=-1+\sqrt{x-1}$ وارسمه



الحل:

إنّ هذه المعادلة محقّقة عندما:

$(y+1\geq 0 \, , \, x-1\geq 0)$

أي: ❶... $(y\geq -1 \, , \, x\geq 1)$

وبتربيع طرفي المعادلة: ❷... $(y+1)^2=(x-1)$

وهي معادلة قطع مُكافِئ لها الصيغة $(y-y_o)^2=4P(x-x_o)$ محوره يوازي $x\acute{x}$ و $4P=1$ أي

$P=\frac{1}{4}>0$ جهة فتحة القطع نحو $x\acute{x}$ الموجبة ورأسه $V(1,-1)$ ومحرقه $F(x_o+P,y_o)=F\left(\frac{5}{4},-1\right)$

ودليله $\Delta: x=x_o-P$ ومنه $x=\frac{3}{4}$

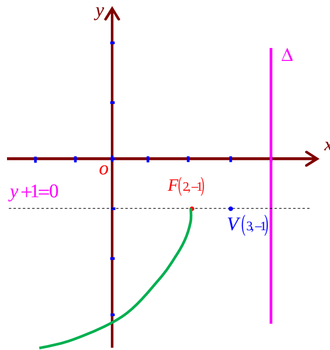
من ❶ و ❷ نجد أنّ المعادلة تمثل جزء من القطع المُكافِئ يقع فوق المستقيم $y+1=0$ وإلى يمين المستقيم $x-1=0$ كما في

تمرين (3): بيّن أيّة منحنى تمثله المعادلة $y=-1-2\sqrt{3-x}$ وارسمه

الحل: $y+1=-2\sqrt{3-x}$

إنّ هذه المعادلة محقّقة عندما: $(y+1\geq 0\,,3-x\geq 0)$ أي: ❶... $(y\geq -1\,,x\leq 3)$

وبتربيع طرفي المعادلة: ❷... $(y+1)^2=-4(x-3)$



وهي معادلة قطع مُكافِئ لها الصيّغة $(y-y_o)^2=4P(x-x_o)$

محوره يوازي $x\acute{x}$ و $4P=-4$ أي $P=-1$

جهة فتحة القطع نحو $x\acute{x}$ السالبة وذروته $V(3,-1)$

ومحرقه $F(x_o+P,y_o)=F(2,-1)$ ودليله $\Delta: x=x_o-P$ ومنه $x=4$

من ❶ و ❷ نجد أنّ المعادلة تمثل جزء من القطع المُكافِئ

يقع تحت المستقيم $y+1=0$ وإلى يسار المستقيم $x-3=0$ كما في

وتر القطع المكافئ

ملاحظة : وتر المنحني كل قطعة مستقيمة تصل نقطتين من المنحني

سنعتبر المستقيم المماس يحدد وتراً طوله صفر لأنه يشترك مع المنحني في جذر مضاعف

الوتر المحرقي هو وتر أحد نقاطه المحرق

الأمثلة :

① أوجد المحل الهندسي لمنتصفات الأوتار المحرقية للقطع المكافئ	$\mathcal{P} : y^2 = 8x$

محرق القطع $F(2,0)$ وحزمة المستقيمات المارة منه $\begin{cases} y = m(x-2)..① \\ \text{مـــــع} \\ x = 2..............② \end{cases}$

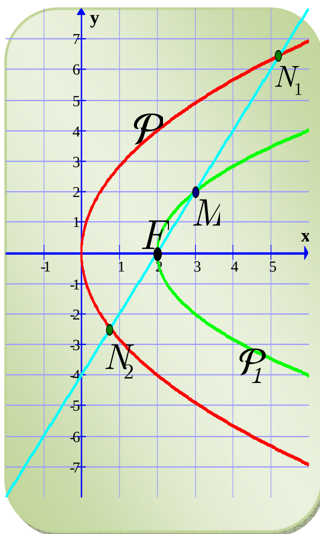
بالحل المشترك للمعادلة ① مع معادلة القطع

نجد بتعويض ① في معادلة القطع $m^2(x-2)^2 = 8x$

ومنه $m^2x^2 - 4(m^2+2)x + 4m^2 = 0$

من أجل $m = 0$ المستقيم هو محور القطع لا يحدد وتراً

يوجد وتر $[N_1N_2]$ إذا كان مميز المعادلة $\Delta \geq 0$ أي $16(m^2+2)^2 - 16m^4 \geq 0$



بالإصلاح $4m^2 + 4 \geq 0$ محققة أياً كانت $m \in \mathbb{R}^*$

وجذرا المعادلة هما طرفا الوتر المحرقي

وفاصلة M منتصف الوتر المحرقي $[N_1N_2]$ هي

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} = \frac{2(m^2+2)}{m^2} = 2 + \frac{4}{m^2}$$

نعوض في ① نجد $y = m(2 + \frac{4}{m^2} - 2)$ أو $y = \frac{4}{m}$

المعادلات الوسيطية لمنتصف الوتر المحرقي

$$\begin{cases} x = 2+\dfrac{4}{m^2} \\ y = \dfrac{4}{m} \end{cases} \quad : \quad m \in \mathbb{R}^*$$

نبدل $m = \dfrac{4}{y}$

$\mathcal{P}_1 : y^2 = 4(x-2)$ لكن $m \in \mathbb{R}^*$ تمثل هذه المعادلة قطع مكافئ عدا $F(2,0)$ إلا أن

المستقيم $x = 2$ يحدد وتراً منتصفه $F(2,0)$ فهي نقطة من المحل الهندسي

المحل الهندسي المطلوب هو القطع المكافئ $\mathcal{P}_1 : y^2 = 4(x-2)$

② أوجد المحل الهندسي لمنتصفات الأوتار المحرقية للقطع المكافئ	$\mathcal{P} : x^2 = 8y$

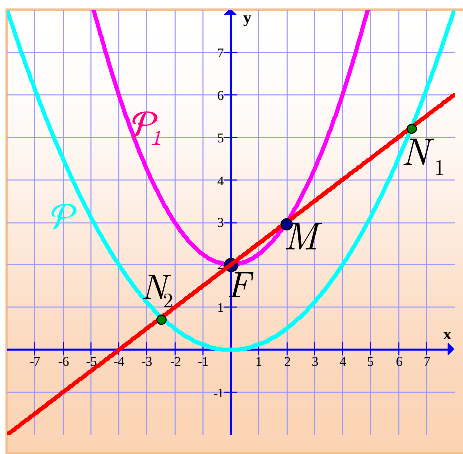
محرق القطع $F(0,2)$ وحزمة المستقيمات المارة منه

$$\begin{cases} y = mx + 2 .. ① \\ \text{مــــع} \\ x = 0 .... ② \end{cases}$$

بالحل المشترك للمعادلة ① مع معادلة القطع

نجد بتعويض ① في معادلة القطع $x^2 = 8(mx+2)$

ومنه $x^2 - 8mx - 16 = 0$



يوجد وتر $[N_1N_2]$ إذا كان مميز المعادلة

$\Delta \geq 0$ أي $64m^2 + 64 \geq 0$ محققة أياً كانت $m \in \mathbb{R}$

جذرا المعادلة هما طرفا الوتر المحرقي

وفاصلة M منتصف الوتر المحرقي $[N_1N_2]$ هي

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} = 4m$$

نعوض في ① نجد $y=4m^2+2$

المعادلات الوسيطية لمنتصف الوتر $m\in\mathbb{R}$, $\begin{cases}x=4m\\ y=4m^2+2\end{cases}$

$x^2=4(y-2)$ ومنه $y=\frac{x^2}{4}+2$

المستقيم $x=0$ محور القطع لا يحدد وتراً المحل الهندسي المطلوب هو القطع المكافئ

$\mathcal{P}_1:x^2=4(y-2)$

③ لدينا القطع المكافئ $\mathcal{P}:y^2=8x$ أوجد المحل الهندسي لمنتصفات الأوتار الموازية للمستقيم

$\Delta:y=2x$

الحل : حزمة المستقيمات الموازية للمستقيم $\Delta:y=2x$ يكون ميل كل منها $m=2$ ومعادلتها

$y=2x+h$....①

بالحل المشترك للمعادلة ① مع معادلة القطع

نجد بتعويض ① في معادلة القطع $(2x+h)^2=8x$

ومنه $4x^2+4(h-2)x+h^2=0$

يوجد وتر إذا كان مميز المعادلة $\Delta\geq 0$

أي $16(h-2)^2-16h^2\geq 0$

بالإصلاح $h\leq 1$ أي

يوجد وتر $[N_1N_2]$ ميله $m=2$ عندما $h\in\left]-\infty,1\right]$

جذرا المعادلة هما طرفا الوتر المحرقي وفاصلة M منتصف الوتر المحرقي $[N_1N_2]$ هي

$x=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}=-\frac{h-2}{2}$

نعوض في ① نجد $y=2$ المعادلات الوسيطية لمنتصف الوتر

$$\begin{cases} x=1-\frac{h}{2} \\ y=2 \end{cases} \quad , \quad h\in]-\infty,1]$$

$y=2$ الحامل الهندسي وهو مستقيم

بما أن $h\leq 1$ فإن $x\geq \frac{1}{2}$ المحل الهندسي نصف المستقيم $y=2$ مع $x\geq \frac{1}{2}$

④لدينا القطع المكافئ	$\mathcal{P}:x^2=4y$	أوجد المحل الهندسي لمنتصفات الأوتار الموازية للمستقيم
$\Delta:y=\frac{1}{2}x$		

الحل حزمة المستقيمات الموازية للمستقيم $\Delta:y=2x$ يكون ميل كل منها $m=2$ ومعادلتها

$y=\frac{1}{2}x+h....①$ بالحل المشترك للمعادلة ①مع معادلة القطع

نجد بتعويض ① في معادلة القطع $x^2=4\left(\frac{1}{2}x+h\right)$

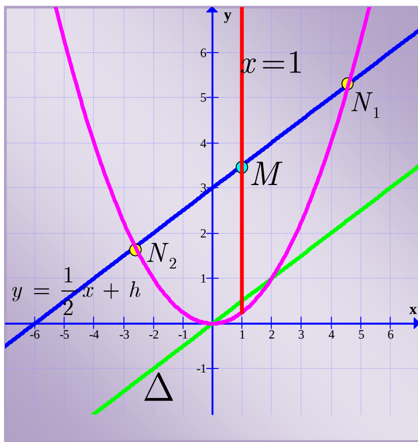
ومنه $x^2-2x-4h=0$ يوجد وتر إذا كان مميز المعادلة $\Delta\geq 0$ أي $4+16h\geq 0$ بالإصلاح

$h\geq -\frac{1}{4}$

أي يوجد وتر $[N_1N_2]$ ميله $m=2$ عندما $h\in\left[-\frac{1}{4},+\infty\right[$

جذرا المعادلة هما طرفا الوتر المحرقي وفاصلة Mمنتصف الوتر المحرقي $[N_1N_2]$هي

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}=1$$



نعوض في ① نجد $y=\frac{1}{2}+h$

المعادلات الوسيطية لمنتصف الوتر

$$\begin{cases} x=1 \\ y=h+\frac{1}{2} \end{cases} \quad , h\in\left[-\frac{1}{4},+\infty\right[$$

الحامل الهندسي وهو مستقيم $x=1$

بما أن $h \geq -\frac{1}{4}$ فإن $y \geq \frac{1}{4}$

المحل الهندسي نصف المستقيم $x=1$ مع $y \geq \frac{1}{4}$

5: برهن أن مجموعة النّقاط التي يرى منها القطع ضمن زاوية قائمة $y^2 = 4Px$ هي نقاط دليل هذا القطع

الحل:

المماس من الشكل $y = mx + h \ : m \neq 0$ (عندما $m=0$ المستقيم يوازي محور القطع فهو قاطع)

بالحل المشّترك للمماس مع القطع نجد $(mx+h)^2 = 4Px$ بالإصلاح

$$x^2m^2 + (2hm - 4P)x + h^2 = 0$$

شرط التّماس الحل وحيد $\Delta = (2hm-4P)^2 - 4m^2h^2 = 0$

ومنه $-16Phm + 16P^2 = 0$ أي $: m \neq 0$ $h = \frac{P}{m}$

معادلة المماس الأول $y = mx + \frac{P}{m}$......①

فالمماس العمود عليه ② $y = -\frac{1}{m}x - Pm$..... (حصلنا عليه بتبديل m بـ $-\frac{1}{m}$ شرط التّعامد)

بالحل المشّترك للمعادلتين ①و ② نجد $\left(m+\frac{1}{m}\right)x + \frac{P}{m} + Pm = 0$

ومنه $\left(m+\frac{1}{m}\right)(x+P) = 0$ بما أن $m+\frac{1}{m} \neq 0$ فإن $x+P=0$

أو $x=-P$ وهو دليل القطع المكافئ

سنبرهن في الحالة العامة أن المحل الهندسي لمنتصفات الأوتار المحرقية لقطع مكافئ هو قطع مكافئ آخر له نفس المحور ونفس جهة الفتحة وذروته محرق القطع المفروض

①أوجد المحل الهندسي لمنتصفات الأوتار المحرقية للقطع المكافئ $\mathcal{P}: y^2 = 4Px$ و $P \neq 0$

محرق القطع $F(P,0)$ وحزمة المستقيمات المارة منه

$$\begin{cases} y = m(x-P)..① \\ \text{مــــــع} \\ x = P..............② \end{cases}$$

بالحل المشترك للمعادلة ①مع معادلة القطع

نجد بتعويض ① في معادلة القطع $m^2(x-P)^2 = 4Px$

ومنه $m^2x^2 - 2P(m^2+2)x + m^2P^2 = 0$

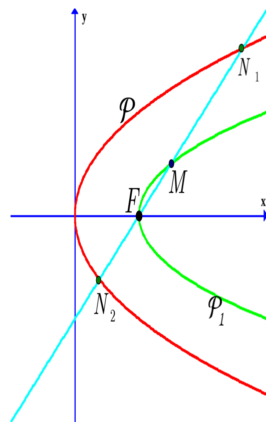
من أجل $m = 0$ المستقيم هو محور القطع لا يحدد وتراً

يوجد وتر $[N_1N_2]$إذا كان مميز المعادلة $\Delta \geq 0$ أي $4P^2(m^2+2)^2 - 4P^2m^4 \geq 0$ بالإصلاح $4(m^2+1)P^2 \geq 0$محققة أياً كانت $m \in \mathbb{R}^*$ وجذرا المعادلة هما طرفا الوتر المحرقي

وفاصلة Mمنتصف الوتر المحرقي $[N_1N_2]$هي $x = \dfrac{x_1+x_2}{2} = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{(m^2+2)P}{m^2}$

نعوض في ① نجد $y = m(\dfrac{(m^2+2)P}{m^2} - P)$ أو $y = \dfrac{2P}{m}$

المعادلات الوسيطية للنقطة M منتصف الوتر المحرقي $[N_1N_2]$هي



$$\begin{cases} x = \dfrac{(m^2+2)P}{m^2} \\ y = \dfrac{2P}{m} \end{cases} \quad : \quad m \in \mathbb{R}^*$$

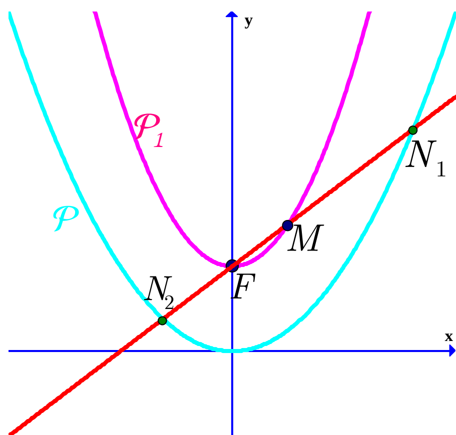
نبدل $m = \dfrac{2P}{y}$

$\mathcal{P}_1 : y^2 = 2P(x-P)$ لكن $m \in \mathbb{R}^*$ تمثل هذه المعادلة قطع مكافئ عدا $F(P,0)$ إلا أن

المستقيم $x = P$ يحدد وتراً منتصفه $F(P,0)$ فهي نقطة من المحل الهندسي

المحل الهندسي المطلوب هو القطع المكافئ $\mathcal{P}_1 : y^2 = 2P(x-P)$

② أوجد المحل الهندسي لمنتصفات الأوتار



المحرقية للقطع المكافئ $\mathcal{P} : x^2 = 4Py$ حيث $P \neq 0$

محرق القطع $F(0,P)$ وحزمة المستقيمات المارة منه

$$\begin{cases} y = mx + P \text{..①} \\ \text{مـــــع} \\ x = 0 \text{..............②} \end{cases}$$

بالحل المشترك للمعادلة ① مع معادلة القطع

نجد بتعويض ① في معادلة القطع $x^2 = 4P(mx+P)$

ومنه $x^2 - 4Pmx - 4P^2 = 0$ يوجد وتر $[N_1N_2]$ إذا كان مميز المعادلة $\Delta \geq 0$ أي

$4P^2m^2 + 16P^2 \geq 0$ محققة أياً كانت $m \in \mathbb{R}$

جذرا المعادلة هما طرفا الوتر المحرقي وفاصلة M منتصف الوتر المحرقي $[N_1N_2]$ هي

$x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{b}{2a} = 2Pm$ نعوض في ① نجد $y = 2Pm^2 + P$

المعادلات الوسيطية للنقطة M منتصف الوتر $m \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x = 2Pm \\ y = 2Pm^2 + P \end{cases}$

$y = \dfrac{x^2}{2P^2} + P$ ومنه $\mathcal{P}_1 : x^2 = 2P(y-P)$

المستقيم $x = 0$ محور القطع لا يحدد وتراً

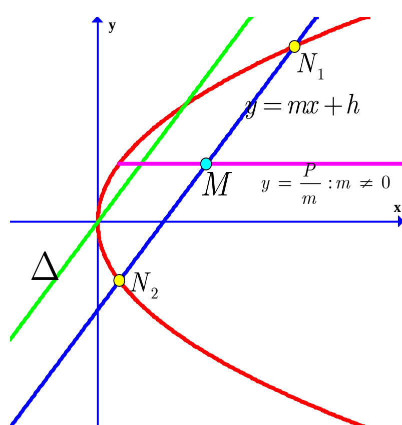
المحل الهندسي المطلوب هو القطع المكافئ $\mathcal{P}_1 : x^2 = 2P(y-P)$

سنبرهن في الحالة العامة أن المحل الهندسي لمنتصفات الأوتار المتوازية لقطع مكافئ هو نصف مستقيم يوازي محور القطع وتقع نقاطه داخل القطع

①لدينا القطع المكافئ $\mathcal{P}: y^2 = 4Px$ حيث $P \neq 0$ أوجد المحل الهندسي لمنتصفات الأوتار الموازية للمستقيم $\Delta : y = mx$

الحل حزمة المستقيمات الموازية للمستقيم $\Delta : y = mx$

يكون ميل كل منها m ومعادلتها $y = mx + h$....① حيث $m \neq 0$



لأنه من أجل $m = 0$ المستقيم يوازي محور القطع لا يحدد وتراً

بالحل المشترك للمعادلة ①مع معادلة القطع

نجد بتعويض ① في معادلة القطع $(mx + h)^2 = 4Px$

ومنه $m^2x^2 + 2(hm - 2P)x + h^2 = 0$

يوجد وتر $[N_1N_2]$إذا كان مميز المعادلة $\Delta \geq 0$

أي$4(mh - 2P)^2 - 4h^2m^2 \geq 0$

أو $-4mPh + 4P^2 \geq 0$ بالإصلاح $h \leq \frac{P}{m}$

جذرا المعادلة هما طرفا الوتر المحرقي وفاصلة Mمنتصف الوتر المحرقي $[N_1N_2]$هي

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} = -\frac{hm - 2P}{2m^2}$$

نعوض في ① نجد $y = \frac{P}{m}$

المعادلات الوسيطية للنقطة M منتصف الوتر

$$\begin{cases} x = -\dfrac{hm - 2P}{2m^2} \\ y = \dfrac{P}{m} \end{cases} \quad , \quad h \in \left]-\infty, \dfrac{P}{m}\right]$$

$y = \dfrac{P}{m}$ الحامل الهندسي وهو مستقيم

بما أن $h \le \dfrac{P}{m}$ ومن $x = -\dfrac{hm - 2P}{2m^2}$ فإن $-2mx + \dfrac{2P}{m} = h$

فيكون $2mx \ge \dfrac{P}{m}$ ومنه $x \le \dfrac{P}{2m} \ : m < 0 \quad , \quad x \ge \dfrac{P}{2m} \ : m > 0$

المحل الهندسي نصف المستقيم $y = \dfrac{P}{m}$ مع $x \le \dfrac{P}{2m}$ عندما $m < 0$

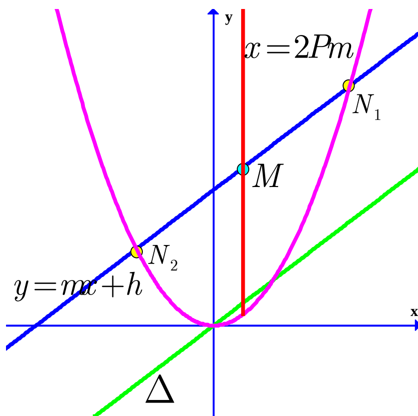
أو $y = \dfrac{P}{m}$ مع $x \ge \dfrac{P}{2m}$ عندما $m > 0$

② لدينا القطع المكافئ $\mathcal{P} : x^2 = 4Py$ حيث $P \ne 0$ أوجد المحل الهندسي لمنتصفات الأوتار الموازية للمستقيم $\Delta : y = mx$

الحل حزمة المستقيمات الموازية للمستقيم $\Delta : y = mx$ يكون ميل كل منها m ومعادلتها

$y = mx + h$....①

بالحل المشترك للمعادلة ① مع معادلة القطع



نجد بتعويض ① في معادلة القطع $x^2 = 4P(mx + h)$

ومنه $x^2 - 4Pmx - 4Ph = 0$

يوجد وتر $[N_1N_2]$ إذا كان مميز المعادلة $\Delta \ge 0$

أي $16P^2m^2 + 16Ph \ge 0$ بالإصلاح $h \ge -Pm^2$

جذرا المعادلة هما طرفا الوتر المحرقي

وفاصلة M منتصف الوتر المحرقي $[N_1N_2]$

هي $x=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}=2Pm$

نعوض في ① نجد $y=h+2Pm^2$ المعادلات الوسيطية للنقطة M منتصف الوتر

$$\begin{cases} x=2Pm \\ y=h+2Pm^2 \end{cases} \quad , h\in\left[-Pm^2,+\infty\right[$$

$x=2Pm$ الحامل الهندسي وهو مستقيم

بما أن $h\geq -Pm^2$ فإن $y\geq 2Pm^2$

المحل الهندسي نصف المستقيم $x=2Pm$ مع $y\geq 2Pm^2$

⑥: لتكن الدائرة $x^2+y^2=1$ والمستقيم $\Delta: x=-1$ أوجد المحل الهندسي لنقط المستوي والتي بعدها عن المستقيم Δ يساوي طول قطعة المماس بين هذه النقطة ونقطة تماس المماس المرسوم من هذه النقطة للدائرة

الحل :بفرض $M(x,y)$ هي النقطة التي تحقق الخاصة المفروضة

بعد $M(x,y)$ عن المستقيم Δ هو $L=|x-1|$ وطول قطعة المماس $F(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$

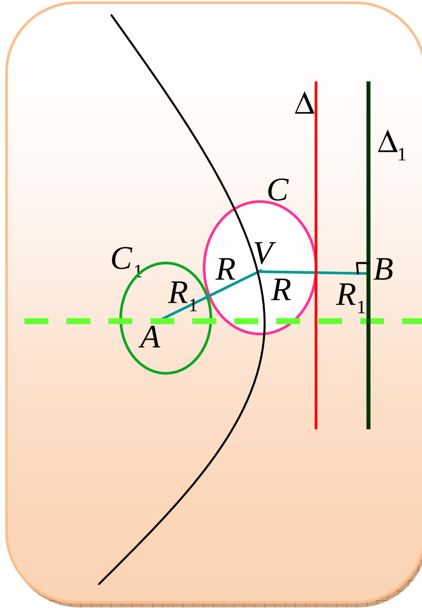
حسب الفرض $\sqrt{x^2+y^2-1}=|x-1|$ بالتربيع

$x^2+y^2-1=x^2+2x+1$

ومنه $y^2=2(x+1)$ وهي معادلة قطع مكافئ

7 : أوجد المحل الهندسي لمراكز الدوائر الماسة لدائرة ومستقيم غير قاطع لها

الحل:



لتكن الدائرة $C_1(A,R_1)$ والمستقيم Δ غير قاطع لها

ولتكن $C(V,R)$ تمس C_1 وتمس Δ

إذا فرضنا Δ_1 مستقيم يوازي Δ ويبعد عنه مسافة تساوي R_1

وكانت B مسقط V على المستقيم Δ_1 فإنّ:

$VA = VB = R + R_1$ أي أنّ $\frac{VA}{VB} = 1$

حسب تعريف القطع المكافئ المحل الهندسي لمراكز الدوائر الماسة لدائرة ومستقيم هو قطع مكافئ محرقه A مركز الدائرة C_1 المفروضة ودليله مستقيم Δ_1 يوازي Δ ويبعد عنه مسافة تساوي R_1 ويقع Δ_1 و C_1 في جهتين مختلفتين بالنسبة إلى Δ

مسألة ① : قطع مكافئ معادلته $\mathcal{P}: y^2 = 4(x+y)$

① أوجد الرّأس والمحرق F والدّليل Δ وارسم القطع

② أوجد معادلة المماس $\mathcal{D}$ لهذا القطع عند نقطة منه M ترتيبها $y = -2$

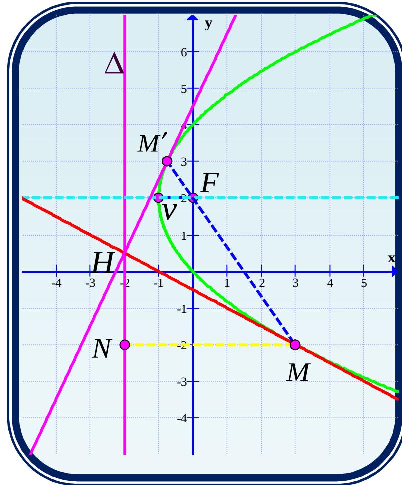
③ إذا كان المماس $\mathcal{D}$ يقطع الدليل Δ في نقطة H برهن أن القطّعة المستّقيمة $[HM]$ ترى من المحرق F ضمن زاوية قائمة

④ أوجد معادلة $\mathcal{D}'$ مماس آخر عمود على المماس $\mathcal{D}$ عين نقطة التّماس M'

⑤ برهن أن النّقاط M ، M' ، F تقع على استقامة واحدة

⑥ إذا كانت N مسقط النّقطة M على الدّليل Δ برهن أن المماس $\mathcal{D}$ منصف داخلي للقطاع $\widehat{FMN}$

الحل:



① $\mathcal{P}: y^2 = 4(x+y)$ تكتب $y^2 - 4y = 4x$

ومنه $(y-2)^2 = 4(x+1)$

الصّيغة القياسيّة $\mathcal{P}: (y-y_0)^2 = 4P(x-x_0)$

قطع مكافئ الرّأس $v(-1,2)$ محوره يوازي $x'x$

$4P = 4$ ، $P = 1 > 0$ جهة فتحة القطع نحو ox^+

محرقه $F(x_0+P, y_0) = (0,2)$

دليله $\Delta: x = x_0 - P$ أي $\Delta: x = -2$

② نبدل $y=-2$ في معادلة القطع نجد $x=3$ تكون نقطة التّماس $M(3,-2)$

نشتق معادلة القطع $(y-2)^2=4(x+1)$ بالنسبة إلى x نجد $2(y-2)y'_x=4$

نعوض $y=-2$ نجد $(-2-2)m=2$ يكون ميل المماس $m=-\frac{1}{2}$

ومعادلة المماس $y-y_M=m(x-x_M)$ بالتّعويض $y+2=-\frac{1}{2}(x-3)$

بالإصلاح نجد المماس $\mathcal{D}:x+2y+1=0$

③ بالّحل المشترك للمعادلتين $\mathcal{D}:x+2y+1=0$ و $\Delta:x=-2$

نجد نقطة تقاطعهما $H(-2,\frac{1}{2})$ ولدينا $M(3,-2)$ و $F(0,2)$

$\overrightarrow{FH}=-2\vec{i}-\frac{3}{2}\vec{j}$ و $\overrightarrow{FM}=3\vec{i}-4\vec{j}$ ومنه $\overrightarrow{FH}\cdot\overrightarrow{FM}=-6+6=0$ أي أن $\overrightarrow{FH}$ عمود على $\overrightarrow{FM}$

إذاً القّطعة المستّقيمة $[HM]$ ترى من المحرق F ضمن زاوية قائمة

ملاحظه : يوجد طرق أخرى لبرهان التعامد منها

نبرهن تحقق عكس نظرية فيثاغورث أي نبرهن تحقق $\overline{FH}^2+\overline{FM}^2=\overline{MH}^2$

أو نبرهن $m_{(FM)}\cdot m_{(FH)}=-1$

أو نكتب معادلة الدائرة التي قطرها $[HM]$ ونبرهن أن F تنتمي إليها

أو نبرهن أن $FE=\frac{1}{2}HM$ حيث E منتصف $[HM]$

④ بما أن $\mathcal{D}'$ عمود على $\mathcal{D}$ فإن $m_{\mathcal{D}}\cdot m_{\mathcal{D}'}=-1$ ومنه $m_{\mathcal{D}'}=2$

نبدل $y'_x=m_{\mathcal{D}'}=2$ في $2(y-2)y'_x=4$ وهي مشتق معادلة القطع نجد $y=3$

بالتبّديل في معادلة القطع نجد $x=-\frac{3}{4}$ نقطة التّماس $M'(-\frac{3}{4},3)$ والمماس عندها

$y-y_{M'}=m(x-x_{M'})$ بالتعويض $y-3=2(x+\frac{3}{4})$ بالإصلاح نجد المماس $\mathcal{D}':y=2x+\frac{9}{2}$

⑤ لدينا $\overrightarrow{FM}=3\vec{i}-4\vec{j}$ و $\overrightarrow{FM'}=-\frac{3}{4}\vec{i}+\vec{j}$ أي أن $\overrightarrow{FM}=-4\overrightarrow{FM'}$ علاقة الارتباط الخطي

أي أن النّقاط M ، M' ، F تقع على استقامة واحدة

ملاحظة يمكن البرهان بطرق أخرى منها

أن نبرهن تحقق $MF+M'F=MM'$ أو نبرهن $m_{(FM)}=m_{(FM')}$

أو نكتب معادلة المستقيم (FM) ونبرهن أن M' تنتمي إليه

⑥ $FM=NM$ حسب تعريف القطع فالمثلث FMN متساوي الساقين

وإحداثيات $N(-2,-2)$ ومنه $m_{(FN)}=\frac{y_N-y_F}{x_N-x_F}=2$

$m_{\mathcal{D}}\cdot m_{(FN)}=-1$

فالمماس $\mathcal{D}$ حامل ارتفاع المثلث FMN متساوي الساقين فهو منصف لزاوية الرأس $\widehat{FMN}$

مسألة ② : ليكن القطعان المكافئان $\mathcal{P}_1 : y^2 = 4x$ و $\mathcal{P}_2 : x^2 = 4y$

❶ عين محرق ودليل كل منهما وارسمهما على نفس جملة المحورين الإحداثيين

❷ أوجد نقط تقاطع القطعين وبين أن القطعين متعامدين في رأسيهما

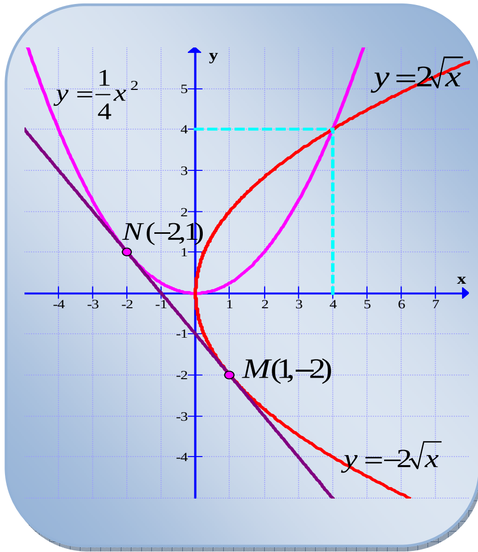
❸ للقطعين مماس مشترك d أوجد معادلته وارسمه على نفس الجملة

❹ احسب المساحة المحصورة بين القطعين ومماسهما المشترك

❺ احسب حجم المجسم الناتج عن دوران المساحة المحصورة القطعين

عندما تدور دورة كاملة حول المحور $x'x$

الحل:



❶ $\mathcal{P}_1 : y^2 = 4x$ محور القطع $x'x$

ذروته $O(0,0)$ ، $P = 1 > 0$

جهة فتحة القطع نحو ox^+

محرقه $F(1,0)$ دليله $\Delta : x = -1$

$\mathcal{P}_2 : x^2 = 4y$ محور القطع $y'y$

ذروته $O(0,0)$ ، $P = 1 > 0$

جهة فتحة القطع نحو oy^+

محرقه $F(0,1)$ دليله $\Delta : y = -1$

❷ بالحل المشترك لجملة للمعادلتين $y^2 = 4x$ و $\frac{x^2}{4} = y$ نبدل الثّانية في الأولى نجد

$\frac{x^4}{16}=4x$ ومنه $x^4-64x=0$ أو $x\left(x^3-64\right)=0$ ومنه $x=0$ أو $x=4$

بالتعويض في $\frac{x^2}{4}=y$ نجد من أجل $x=0$ أن $y=0$ نقطة التقاطع الأولى $O\left(0,0\right)$

من أجل $x=4$ أن $y=4$ نقطة التقاطع الأولى $N\left(4,4\right)$

في الرّأس $O\left(0,0\right)$ مماس أحد القطعين هو محور للقطع الثّاني وهما متعامدين

أي تعامد المماسين في النّقطة المشتركة $O\left(0,0\right)$ أي أن القطعين متعامدين في تلك النّقطة

❸نفرض المماس المشترك $y=mx+h$.......①

بالحل المشترك للمعادلة ① مع القطع $\mathcal{P}_1: y^2=4x$

نجد $\left(mx+h\right)^2=4x$ بالإصلاح $m^2x^2+2(mh-2)x+h^2=0$ ($m=0$ يكون المستقيم قاطع)

شرط التّماس $\Delta=b^2-4ac=0$ ومنه $4(mh-2)^2-4m^2h^2=0$

ومنه $mh-1=0$......②

بالحل المشترك للمعادلة ① مع القطع $\mathcal{P}_2: x^2=4y$

نجد $x^2=4\left(mx+h\right)$ بالإصلاح $x^2-4mx-4h=0$

شرط التّماس $\Delta=b^2-4ac=0$ ومنه $16m^2+16h=0$

ومنه $m^2+h=0$......③

بالحل المشترك للمعادلة ② مع ③

من المعادلة ③ نجد $h=-m^2$ نبدل في ② نجد $-1=m^3$ ومنه $m=-1$

نعوض في③ نجد $h=-1$

بالتّعويض في ① نجد المماس المشترك $y=-x-1$

❹ لنعين نقطة تماس المماس المشترك مع $\mathcal{P}_2$ من معادلة الحل المشّترك $x^2-4mx-4h=0$

فاصلة نقطة التّماس $x=\frac{-b}{2a}=2m$ وبتعويض $m=-1$ نجد $x=-2$ نبدل في المماس المشّترك

نجد $y=1$ نقطة مع $\mathcal{P}_2$ هي $N(-2,1)$

لنعين نقطة تماس المماس المشّترك مع $\mathcal{P}_1$ من معادلة الحل المشّترك $m^2x^2+2(mh-2)x+h^2=0$

فاصلة نقطة التّماس $x=\frac{-b}{2a}=-\frac{(mh-2)}{m^2}$ وبتعويض $m=h=-1$ نجد $x=1$ نبدل في المماس

المشّترك نجد $y=-2$ نقطة مع $\mathcal{P}_1$ هي $M(1,-2)$

$$S=\int_{-2}^{0}\left(y_{\mathcal{P}_2}-y_d\right)dx+\int_{0}^{1}(y_{\mathcal{P}_1}-y_d)dx$$

$$S=\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{4}x^2+x+1\right)dx+\int_{0}^{1}(-2\sqrt{x}+x+1)dx$$

$$S=\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{4}x^2+x+1\right)dx+\int_{0}^{2}(-2x^{\frac{1}{2}}+x+1)dx$$

$$S=\left[\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{0}^{1}$$

$$S=0-\left(\frac{-2}{3}+2-2\right)+\left(-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}+1\right)-0$$

$$S=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

❺ $V=\pi\int_{0}^{4}\left(y_1{}^2-y_2{}^2\right)dx$ أو $V=\pi\int_{0}^{4}\left(\left(2\sqrt{x}\right)^2-\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2\right)dx$

$V=\pi\int_{0}^{4}\left(4x-\frac{1}{16}x^4\right)dx$ أي $V=\pi\left[2x^2-\frac{1}{80}x^5\right]_{0}^{4}=\pi\left[x^2(2-\frac{1}{80}x^3)\right]_{0}^{4}$

$V=\pi\left(16(2-\frac{4}{5})\right)=\frac{96}{5}\pi$ وحدة حجم

مسألة③ : لتكن الدّائرة $C: x^2+y^2-4x=0$ ، $M(x,y)$ نقطة من المستوي

إذا كان بعد $M(x,y)$ عن المحور $y\acute{y}$ يساوي طول قطعة المماس المرسوم من النّقطة M للدّائرة C

① أثبت أن مجموعة النّقاط $M(x,y)$ وعين محرقه F ودليله Δ

② إذا كان $r=FM$ وكانت $\theta=\angle(\overrightarrow{ox},\overrightarrow{FM})$ قياس الزّاوية بين المحور $x\acute{x}$ والمتّجه $\overrightarrow{FM}$

برهن أن $r=\dfrac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$

الحل : ① بعد النّقطة $M(x,y)$ عن المحور $y\acute{y}$ هو $|x|$

طول قطعة المماس المرسوم من النّقطة M للدّائرة C هو $\ell=\sqrt{F(M)}=\sqrt{x^2+y^2-4x}$

حسب الفرض $|x|=\sqrt{x^2+y^2-4x}$ بالتّربيع نجد $y^2=4x$

مجموعة النّقاط $M(x,y)$ قطع مكافئ محور $x\acute{x}$ ذروته $O(0,0)$ محرقه $F(1,0)$ دليله $\Delta: x=-1$

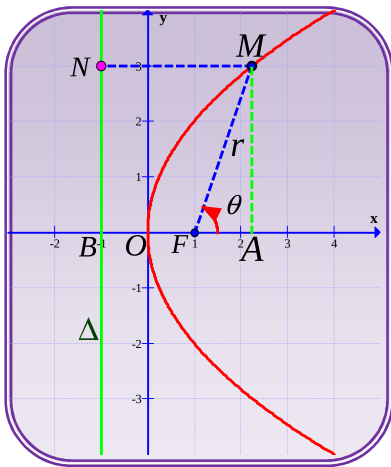
② بما أن $FM=MN$ حسب تعريف القطع

ومنه $FM=BA=BF+FA$

أي $r=r\cdot\cos\theta+2$ ومنه $r-r\cdot\cos\theta=2$

ومنه $r(1-\cos\theta)=2$ أي $2r\sin^2\frac{\theta}{2}=2$

أو $r\sin^2\frac{\theta}{2}=1$ ، $k\in\mathbb{Z}$ ، $\theta\neq 2\pi k$: $r=\dfrac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$



حل آخر : إحداثيات $M(x,y)$ بدلالة θ

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\theta + 1 \\ y = r\cdot\sin\theta \end{cases}$$

بالتّعويض في معادلة القطع $(r\cdot\sin\theta)^2 = 4(r\cdot\cos\theta + 1)$

$$r^2\cdot\sin^2\theta - 4r\cdot\cos\theta - 4 = 0$$

مميزها $\Delta = 16\cos^2\theta + 16\sin^2\theta = 16$

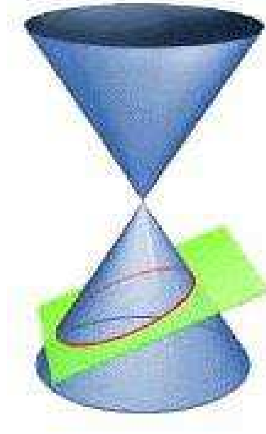
ومنه $r = -\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}} = -\dfrac{8\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{8\sin^2\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos^2\dfrac{\theta}{2}} = \dfrac{4\cos\theta - 4}{2\sin^4\theta}$ مرفوض لأن $r > 0$

أو $r = \dfrac{4\cos\theta + 4}{2\sin^4\theta} = -\dfrac{8\cos^2\dfrac{\theta}{2}}{8\sin^2\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos^2\dfrac{\theta}{2}} = \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$

أي $k \in \mathbb{Z}$, $\theta \neq 2\pi k$: $r = \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$ وهو المطلوب

الفصل العاشر

القطع النّاقص



وجدنا أنّ القطع النّاقص هو أحد مقاطع

السطح المخروطي كما في الشكل المجاور

وأنّ نقط القطع تحقق نفس الخاصة كما في التعريف الآتي:

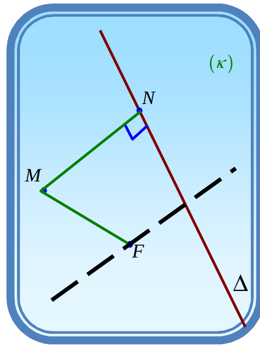
تعريف: لتكن F نقطة ثابتة في المستوي (κ)

و Δ مستقيم ثابت في نفس المستوي (κ) و $(F \notin \Delta)$

القطع النّاقص هو مجموعة نقط المستوي (κ)

التي نسبة بعد كل منها عن F إلى بعدها عن

Δ يساوي e $(1 > e > 0)$.



التّعريف بالرّموز : بفرض N مسقط M على المستقيم Δ

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \frac{MF}{MN} = e \text{........✪}$$

اصطلاحات:

- نُسمِّي النّقطة الثّابتة F مِحرق (بؤرة القطع).
- Δ الدّليل المتعلّق بالمحرق F .
- e الاختلاف المركزي(التّباعد المركزي).

المعادلة المختزلة لقطع ناقص:

وجدنا في الفصل الخامس أن للقطع الناقص مركز تناظر وأنه إذا كان نصف القطر الكبير $OA = a$

فإن بعد مركز القطع عن الدليل هو $OH = \frac{a}{e}$

نحدّث المستوي (κ) بمعلمٍ متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

مركز القطع مبدأ للجملة والمحور المحرقي

هو المحور $x'Ox$ ومحرقه $F(c, 0)$

فتكون معادلة الدليل المتعلق

بالمحرق F هي $\Delta : x = \frac{a}{e}$ والتّباعد المركزي $e \in]0,1[$

وحسب تعريف القطع فإن $\frac{MF}{L(M, \Delta)} = e$

بالتّعويض $\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\left|x - \frac{a}{e}\right|} = e$

ومنه $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = |ex - a|$ بالتّربيع $x^2 - 2c \cdot x + c^2 + y^2 = e^2x^2 - 2e \cdot a \cdot x + a^2$

لكن $c = a \cdot e$ نجد $x^2 - 2a \cdot e \cdot x + a^2e^2 + y^2 = e^2x^2 - 2e \cdot a \cdot x + a^2$

بعملية إصلاح $(1-e^2)x^2 + y^2 = a^2(1-e^2)$ نقسم الطّرفين على $a^2(1-e^2) \neq 0$

نجد $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$

بما أن $1 - e^2 > 0$ نفرض $a^2(1-e^2) = b^2$ نجد المعادلة

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ التي نسميها المعادلة المختزلة لقطع ناقص محوره المحرقي xx'

ملاحظة : لقد فرضنا أن $a^2(1-e^2)=b^2$ أي $b^2=a^2-a^2e^2$ أي $b^2=a^2-c^2$

دراسة تحليلية لمعادلة القطع النّاقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

① النّقطة $M_1(-x,y)$ نظيرة $M(x,y)$ بالنّسبة للمحور $y\acute{y}$ تحقق المعادلة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

أي أن $y\acute{y}$ محور تناظر للقطع وهو المحور اللامحرقي

② النّقطة $M_2(x,-y)$ نظيرة $M(x,y)$ بالنّسبة للمحور $x\acute{x}$ تحقق المعادلة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

أي أن $x\acute{x}$ محور تناظر للقطع وهو المحور المحرقي

③ النّقطة $M_3(-x,-y)$ نظيرة $M(x,y)$ بالنّسبة للمبدأ $O(0,0)$ تحقق المعادلة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

أي أن $O(0,0)$ مركز تناظر للقطع

④ من الخصائص التّناظرية السّابقة وجدنا أنّ القطع النّاقص متناظر بالنّسبة للمحور $y\acute{y}$

نستنتج أن للقطع دليل آخر $\Delta':x=-\frac{a}{e}$ يتعلق بالمحرق $F'(-c,0)$

وهو نظير $\Delta:x=\frac{a}{e}$ بالنّسبة إلى المحور $y\acute{y}$ ويحققان تعريف القطع

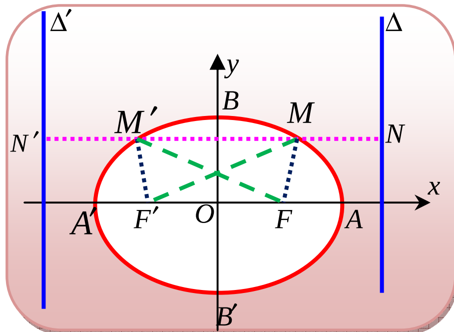
إذا كانت M' نظيرة M بالنّسبة إلى المحور $y\acute{y}$ فإنّ $M'\in\mathcal{E}$ وعندئذ $\frac{M'F}{M'N}=e$

بما أن التّناظر يحافظ على الأطوال :

فإن $M'F=MF'$ و $M'N=MN'$

ومنه $\frac{MF'}{MN'}=e$ وبما أنّ النقطة $M\in\mathcal{E}$

يكون $\Delta':x=-\frac{a}{e}$ دليل آخر للقطع يتعلق بالمحرق F'



إذاً $\frac{MF'}{MN'}=\frac{MF}{MN}=e$ حسب خواص التناسب $\frac{MF'+MF}{MN'+MN}=e$ ومنه

$$\frac{MF'+MF}{NN'}=e$$

لكن $NN'=2\frac{a}{e}$ إذاً $MF+MF'=2a$

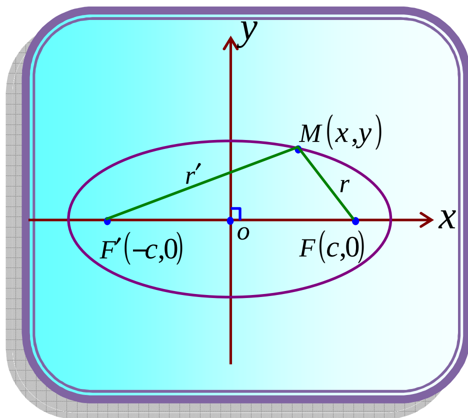
نستنتج : تعريفاً آخراً للقطع النّاقص:

لتكن F',F نقطتين ثابتتين في المستوي (κ)، القطع النّاقص هو مجموعة النقط M من المستوي (κ) التي مجموع بعديها عن النقطتين F و F' يساوي طولاً ثابتاً $2a$ (طول القطر المحرقي).

بالرموز: $M\in\mathcal{E}\Leftrightarrow MF+MF'=2a$

ملاحظة :

يمكن الوصول للمعادلة المختزلة عن طريق هذا التّعريف:



نفرض أن مركز القطع مبدأ لجملة قانونية، والمحور المحرقي

هو المحور $x'ox$ فإن محرقه $F(c,0)$ والمحرق $F'(-c,0)$

وحسب التعريف $MF+MF'=2a$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

تكتب $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ بالتربيع

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+(x+c)^2-(x-c)^2$ أو $\lambda\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$ بالتربيع أيضاً

$$\lambda^2x^2+2cxa^2+c^2a^2+y^2a^2=a^4+2cxa^2+c^2x^2$$

$a^2x^2-x^2c^2+y^2a^2=a^4-a^2c^2$ ومنه $\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=\left(a^2-c^2\right)a^2$

بما أن $a>c$ نفرض $a^2-c^2=b^2$ نجد المعادلة $b^2x^2+a^2y^2=b^2a^2$

بالتقسيم على $b^2a^2\neq 0$ نجد $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

⑥ من أجل $y=0$ نجد $\frac{x^2}{a^2}=1$ ولها حلين $x=\pm a$ للقطع $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

نقطتين على المحور المحرقي هما $A(a,0)$, $A'(-a,0)$ نسميهما **الرّأسين**

وطول القطر المحرقي هو المسافة الرّأسين وهي $A'A=2a$ (القُطر الكبير)

⑦من أجل $x=0$ نجد $\frac{y^2}{b^2}=1$ ولها حلين $y=\pm b$ للقطع $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

نقطتين على المحور اللامحرقي هما $B(0,b)$, $B'(0,-b)$ نسمّيهما **القُطبيّن**

وطول القطر اللّامحرقي هو المسافة بينهما وهي $B'B=2b$ (القُطر الصغير)

⑧ القطع النّاقص منحني مغلق، لأن كل مستقيم يمر من مركز القطع يقطع القطع في نقطتين

الإثبات: عند الحل المشترك لمعادلة المستقيم $y=mx$ المار من مركز القطع مع معادلة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

نجد $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx)^2}{b^2}=1$ ومنه $\left(m^2a^2+b^2\right)x^2=a^2b^2$ أو $x^2=\frac{a^2b^2}{m^2a^2+b^2}$

ولها حلّين هما $x=\pm\sqrt{\frac{a^2b^2}{m^2a^2+b^2}}$

وبالتّالي إحداثيات طرفا القطر لهذا القطع والواقعتين على المستقيم $y=mx$

$M_2\left(-\sqrt{\dfrac{a^2b^2}{m^2a^2+b^2}}\,,-m\sqrt{\dfrac{a^2b^2}{m^2a^2+b^2}}\right)$ و $M_1\left(\sqrt{\dfrac{a^2b^2}{m^2a^2+b^2}}\,,m\sqrt{\dfrac{a^2b^2}{m^2a^2+b^2}}\right)$

لنحسب طول قطر القطع $[M_1M_2]$ ، $M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

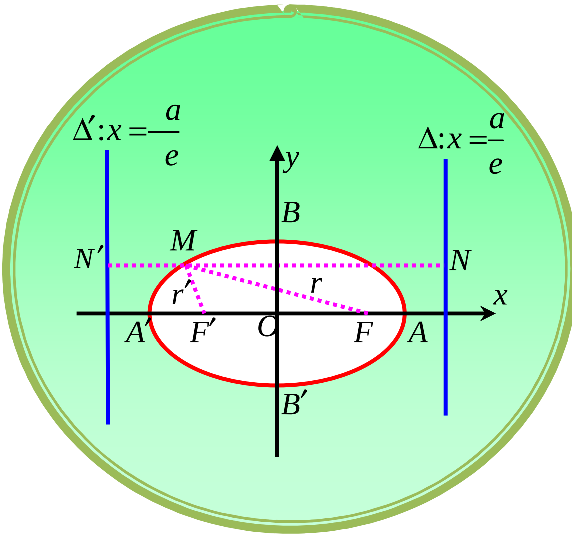
$$M_1M_2=\sqrt{\frac{4a^2b^2}{m^2a^2+b^2}+m^2\frac{4a^2b^2}{m^2a^2+b^2}}=2ab\sqrt{\frac{1+m^2}{m^2a^2+b^2}}$$

مثال : لنحسب طول قطر القطع الناقص $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{8}=1$ والمحمول على منصف الربع الأول

الحل: معادلة منصف الرّبع الأول $y=x$ نبدل $b=2\sqrt{2}$, $a=2\sqrt{6}$, $m=1$ في طول القطر السابق

نجد $M_1M_2=2ab\sqrt{\dfrac{1+m^2}{m^2a^2+b^2}}=4\sqrt{6}\left(2\sqrt{2}\right)\sqrt{\dfrac{2}{32}}=4\sqrt{3}$

⑨حساب نصفي القطرين المِحرقيين $r\,,\,r'$ لنقطة من قطع ناقص



إذا كانت $M\,(x\,,y)$ نقطة من القطع النّاقص:

نعلم أنّ $\dfrac{MF'}{MN'}=\dfrac{MF}{MN}=e$

ومنه $MF'=e\cdot MN'$ و $MF=e\cdot MN$

أي: $r'=e\cdot MN'$ و $r=e\cdot MN$

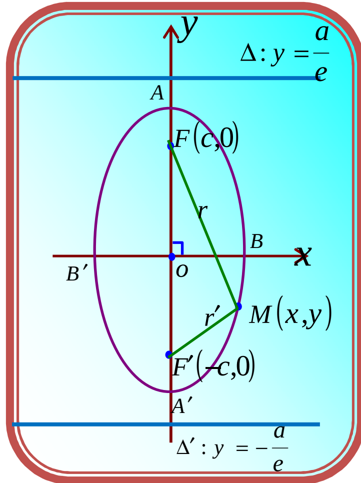
$r'=e\cdot(x-x_{\Delta'})\quad :x>x_{\Delta'}$

لكن $x_{\Delta'}=-\dfrac{a}{e}$ ومنه $r'=a+e\cdot x$

$r=e\cdot(x_\Delta-x)\ :\ x<x_\Delta$ لكن $x_\Delta=\dfrac{a}{e}$ ومنه $r=a-e\cdot x$

ملاحظة : بما أن $r' = a + e \cdot x$ و $r = a - e \cdot x$ فإن $r + r' = 2a$

⑩ إذا كان المحور المحرقي هو $y\acute{y}$ ، تكون إحداثيات المحرقين $F(0,c)\ ,\ F'(0,-c)$



والرّأسين $A(0,a)\ ,\ A'(0,-a)$

والقطبيّن $B(b,0)\ ,\ B'(-b,0)$

والمعادلة المختزلة في هذه الحالة $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

والدّليلين $\Delta : y = \frac{a}{e}\ ,\ \Delta' : y = -\frac{a}{e}$

نصفا القطرين المحرقيين للنقطة $M\ (x\ ,y\ )$ هما:

$r = a - e \cdot y \qquad , \qquad r' = a + e \cdot y$

يمكن تلخيص الدّراسة السّابقة بالجّدول الآتي :

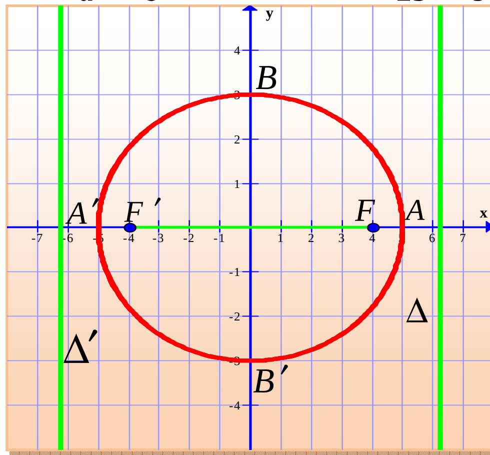
الشّكل والمعادلة	الرّأسين	القُطبيّن	المحرقيّن	الدّليلين	نصفا القطريّن المحرقييّن
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$A\,(a,0)$ $A'(-a,0)$	$B\,(0,b)$ $B'(0,-b)$	$F\,(c,0)$ $F'(-c,0)$	$\Delta : x=\frac{a}{e}$ $\Delta' : x=-\frac{a}{e}$	$r=a-e\cdot x$ $r'=a+e\cdot x$
$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$	$A\,(0,a)$ $A'(0,-a)$	$B\,(b,0)$ $B'(-b,0)$	$F\,(0,c)$ $F'(0,-c)$	$\Delta : y=\frac{a}{e}$ $\Delta' : y=-\frac{a}{e}$	$r'=a+e\cdot y$ $r=a-e\cdot y$

الأمثلة:

1 لدينا القطع النّاقص $9x^2+25y^2=225$ أوجد محرقيه، واختلافه المركزي، ورأسيه، وقطبيه ومعادلتي دليليه، ونصفا القطرين المحرقيين للنقطة M التي فاصلتها $x=3$، وارسم القطع وارسم دليليه.

الحل:

بعد تقسيم طرفي المعادلة على 225 تكتب المعادلة $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ من الصيغة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



قطع ناقص مركزه مبدأ الإحداثيّات $o(0,0)$ و $a^2=25$

أي $a=5$ و $b^2=9$ أي $b=3$ محوره المِحرقي $x'x$

$c^2=a^2-b^2=16$ ومنه $c=4$

محرقا القطع: $F'(-4,0)$, $F(4,0)$

ويكون الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$

الرّأسين $A'(-5,0)$, $A(5,0)$

القطّبين $B'(0,-3)$, $B(0,3)$

دليليه : $\Delta':x=-\frac{a}{e}$, $\Delta:x=\frac{a}{e}$ أي $\Delta':x=-\frac{25}{4}$, $\Delta:x=\frac{25}{4}$

نصفا القطرين المِحرقيين للنّقطة M:

$r'=a+e\cdot x$, $r=a-e\cdot x$ ومنه $r'=5+\frac{4(3)}{5}=\frac{37}{5}$, $r=5-\frac{4(3)}{5}=\frac{13}{5}$

❷ قطـع نـاقص محرقاه $F'(-3,0)$, $F(3,0)$ ويمـر مـن النقطـة $M\ (4,1)$ أوجـد نصـفا القطـرين المحرقيين

للنقطة M وأوجد معادلة القطع ،واختلافه المركزي، ورأسيه، وقطبيه، ومعادلتي دليليه،

وارسم القطع وارسم دليليه.

الحل: $r=\sqrt{(x_M-x_F)^2+(y_M-y_F)^2}$ أي $r=\sqrt{(4-3)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$

و $r'=\sqrt{(4+3)^2+(1-0)^2}=5\sqrt{2}$

لإيجاد معادلة القطع : $F'(-3,0)$, $F(3,0)$ فهما من الشّكل $F'(-c,0)$, $F(c,0)$

يكون المركز $O\ (0,0)$ والمحور المحرقي $x'x$ و $c=3$ عندئذ $r+r'=2a$

لكن $r+r'=6\sqrt{2}$ ومنه $a=3\sqrt{2}$ ولدينا $b^2=a^2-c^2$ أي $b^2=9$

تكون $b=3$ معادلة القطع $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$

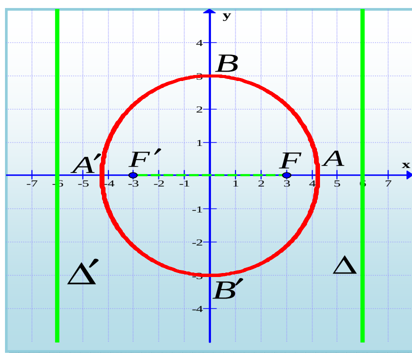
ويكون الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

الرّأسين $A'\left(-3\sqrt{2},0\right)$, $A\left(3\sqrt{2},0\right)$

القطبين $B'(0,-3)$, $B\ (0,3)$

دليلاه : $\Delta':x=-\frac{a}{e}$, $\Delta:x=\frac{a}{e}$

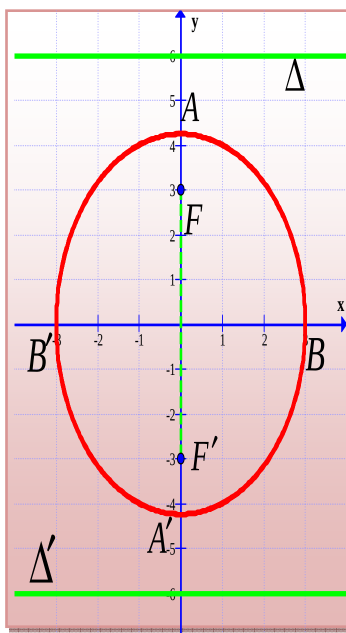
أي $\Delta':x=-6$, $\Delta:x=6$



3 قطع ناقص محرقه $F(0,3)$ معادلة الدّليل المتعلّق بهذا المحرق $\Delta : y = 6$ ويمر القطع من النّقطة

$M(1,4)$ احسب اختلافه المركزي، ما نوع القطع، وأوجد معادلة القطع، وإحداثيات محرقه الآخر

وإحداثيات رأسيه وقطبيه، ومعادلة دليله الآخر، وارسم القطع وارسم دليليه



الحل : $\frac{MF}{L(M,\Delta)} = e$ أي $\frac{\sqrt{(x_F - x_M)^2 + (y_F - y_M)^2}}{|y_\Delta - y_M|} = e$

بالتّعويض $e = \frac{\sqrt{(0-1)^2 + (3-4)^2}}{|6-4|}$

ومنه $e = \frac{\sqrt{2}}{2} \in]0,1[$ القطع قطع ناقص

نفرض $N(x,y)$ يكون $\frac{NF}{L(N,\Delta)} = e$

أي $\frac{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2}}{|y_\Delta - y_N|} = e$

بالتّعويض $\frac{\sqrt{(0-x)^2 + (3-y)^2}}{|6-y|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

نجري إصلاح للمعادلة $\sqrt{2(0-x)^2 + 2(3-y)^2} = |6-y|$

$2x^2 + 18 - 12y + 2y^2 = 36 - 12y + y^2$

ومنه $2x^2 + y^2 = 18$ أي $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1$ مركزه مبدأ الإحداثيّات $o(0,0)$ و $b^2 = 9$ أي $b = 3$

و $a^2 = 18$ أي $a = 3\sqrt{2}$ ومحوره المِحرقي $y\acute{y}$ و $c^2 = a^2 - b^2 = 9$

ومنه $c=3$ محرقه الآخر : $F'(0,-3)$ ويكون الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

الرّأسين $A'(0,3\sqrt{3})$, $A(0,3\sqrt{2})$ والقطّبين $B'(-3,0)$, $B(3,0)$

دليله لآخر : $\Delta':y=-\frac{a}{e}$ أي $\Delta':y=-6$

3 أوجد المحل الهندسي لمراكز الدوائر الماسة لدائرتين متباعدتين داخلاً أو متماستين داخلاً وغير طبوقتين

الحل:

لتكن الدائرتان $C_1(A,R_1)$

و $C_2(B,R_2)$ حيث $AB\le R_2-R_1$

ولتكن $C(V,R)$ تمس كلا الدائرتين

عندئذ : $AV=R_1+R....$①

و $BV=R_2-R....$②

إذا كان $R_1<R_2$ بجمع① مع ②

نجد $BV+AV=R_2+R_1>0$

حسب تعريف القطع الناقص مجموعة النقاط V هي قطع ناقص محرقاه A,B

التّمثيل الوسيطي لقطع ناقص:

ليكن القطع النّاقص $\mathcal{E}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بموازنة هذه المعادلة مع المتطابقة المثلثّية $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

يمكننا أن نفرض $\frac{y}{b}=\sin\theta$, $\frac{x}{a}=\cos\theta$ نجد

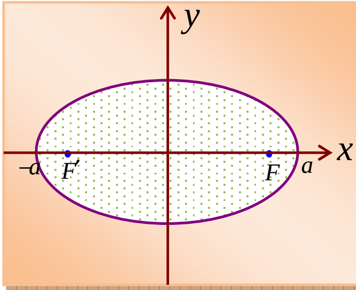
$:\theta\in\mathbb{R}\ \begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$ والّذي نعتبره تمثيلاً وسيطيّاً للقطع النّاقص

مثال: اكتب تمثيلاً وسيطيّاً للقطع $\mathcal{E}:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

الحل: $:\theta\in\mathbb{R}\ \begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$ ومنه $:\theta\in\mathbb{R}\ \begin{cases}x=3\cos\theta\\ y=5\sin\theta\end{cases}$

مساحة القطع النّاقص

برهن أنّ مساحة القطع النّاقص $\mathcal{E}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ تعطى بالعلاقة $S=\pi a\cdot b$



البرهان:

بسبب التّناظر بالنّسبة للمبدأفإنّ $S=4\pi\int_0^a y\,dx$

باستخدام التمثيل الوسيطي $:\theta\in\mathbb{R}\ \begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$

يكون $dx=-a\sin\theta\,d\theta$

من أجل $x=0$ تكون $\theta=\frac{\pi}{2}$ ومن أجل $x=a$ تكون $\theta=0$

$S=4\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}-a\cos\theta\cdot b\sin\theta\,d\theta$ ومنه $S=2\pi a\cdot b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta$

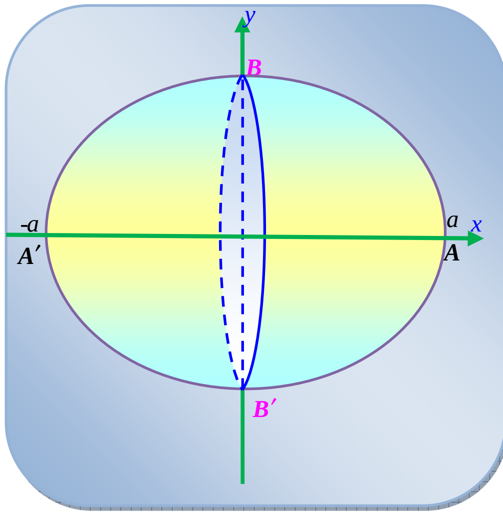
$S=\pi a\cdot b\left[-\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ ومنه $S=\pi a\cdot b\left[1-0\right]$ أي $S=\pi a\cdot b$

مثال ذلك مساحة القطع الناقص $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{18}=1$ نبدل في قانون المساحة $a=3\sqrt{2}\ ,\ b=3$ نجد

$$S=\pi a\cdot b=\pi\left(3\sqrt{2}\right)(3)=9\sqrt{2}\,\pi$$

حجم مجسم القطع النّاقص

عندما نُدوِّر القطع النّاقص $\varepsilon:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ حول المحور $x\acute{x}$ ينتج مجسم يعطى حجمه بالصّيغة



$$V=\frac{4}{3}\pi b^2 a$$

البرهان:

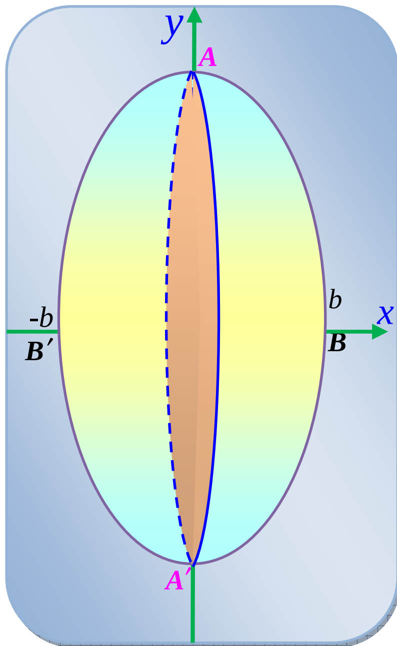
$V=\pi\int_{-a}^{a}y^2dx$ بسبب التّناظر بالنّسبة للمحور $y\acute{y}$

$V=2\pi\int_{0}^{a}y^2dx$ من معادلة القطع نجد $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$

$$V=2\pi\int_{0}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx$$

$$V=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=2\pi\frac{b^2}{a^2}(a^3-\frac{1}{3}a^3)$$

$$V=\frac{4}{3}\pi b^2 a$$



ملاحظة: عندما نُدوِّر القطع النّاقص

$\varepsilon:\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ حول المحور $x\acute{x}$

ينتج مجسم يعطى حجمه بالصّيغة

$$V=\frac{4}{3}\pi a^2 b$$

طول محيط القطع الناقص

يحسب بشكل تقريبي وفق القانون الآتي:

$$L=\pi(a+b)(1+\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{64}t^4+\frac{1}{256}t^6+......)\ ,\ t=\frac{a-b}{a+b}$$

أو باستخدام قانون حساب طول القوس $L=2\pi a(1-\frac{1}{2}e^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\frac{e^4}{3}-\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\frac{e^6}{5}-......)$

كما تعطي طريقة رامانجن تقريبا أفضل هو: $L\approx\pi\left[3(a+b)-\sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right]$

مثال: أوجد معادلة القطع النّاقص الذّي مساحته $S=15\pi$ ، $c=4$ المحور المحرقي $x\acute{x}$ ومركز القطع $(0,0)$واكتب تمثيلاً وسيطياً واحسب حجم المجسم الناتج عن دوران سطح القطع حول المحور xx' وحجم المجسم الناتج عن دوران سطح القطع حول المحور yy' واحسب طول محيط القطع

الحل:

بما أنّ مركز القطع $O(0,0)$ ، فمعادلة القطع تكتب بالشّكل: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

ولكن مساحة القطع النّاقص $S=15\pi$ ومنه $\pi ab=15\pi$

أي أنّ: $ab=15$ ......①

و $a^2-b^2=c^2=16$ ....②

من ① نجد: $a=\frac{15}{b}$ نعوض في ② نجد: $\frac{225}{b^2}-b^2=16$

ومنه: $225-b^4=16b^2$

وبالتّالي: $b^4+16b^2-225=0$ ومنه $(b^2+25)(b^2-9)=0$

إمّا $b^2=-25<0$ مرفوض أو $b^2=9$ ومنه $a^2=25$

معادلة القطع النّاقص هي: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

التمثيل الوسيطي للقطع $\theta\in\mathbb{R}$: $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$ بالتعويض $\theta\in\mathbb{R}$: $\begin{cases}x=5\cos\theta\\ y=3\sin\theta\end{cases}$

حجم مجسم القطع الناتج عن دوران سطح القطع حول المحور xx' هو $V=\frac{4}{3}\pi b^2a=60\pi$

وحجم المجسم الناتج عن دوران سطح القطع حول المحور yy' هو $V=\frac{4}{3}\pi a^2b=100\pi$

طول محيط القطع :

أو $L=\pi(a+b)(1+\frac{1}{16}t^2+\frac{1}{64}t^4+\frac{1}{256}t^6+......)\ ,\ t=\frac{a-b}{a+b}$

$$t=\frac{a-b}{a+b}=\frac{1}{4}$$

$$L=\pi(8)(1+\frac{1}{16}\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\frac{1}{256}+\frac{1}{256}\frac{1}{4096}+......)$$
$$L=\pi(8)(1+0.0039+0.00006+....)=8.03\pi$$

أو $L\approx\pi\left[3(a+b)-\sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right]$

ومنه $L\approx\pi\left[24-\sqrt{(18)(14)}\right]=\pi[24-15,87]=8,13\pi$

تمارين :

تمرين ① : برهن أن معادلة مماس القطع النّاقص $\mathcal{E}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ في نقطة $M(x_0,y_0)\in\mathcal{E}$

تعطى بالصّيغة $\frac{x_0\cdot x}{a^2}+\frac{y_0\cdot y}{b^2}=1$

الحل: نشتق معادلة القطع $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بالنّسبة إلى x نجد $\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'_x}{b^2}=0$

عند $M(x_0,y_0)$ يكون $\frac{x_0}{a^2}+\frac{y_0\cdot m}{b^2}=0$ ومنه ميل المماس $y_0\neq 0$: $m=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$

فتكون معادلة المماس عند $M(x_0,y_0)$ هي

$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$ بالإصلاح

$a^2y_0y-a^2y_0^2=-b^2x_0x+b^2x_0^2$ أو $a^2y_0y+b^2x_0x=b^2x_0^2+a^2y_0^2$

نقسم الطّرفين على $a^2b^2\neq 0$ نجد المعادلة $\frac{y_0y}{b^2}+\frac{x_0x}{a^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$

وبما أن $M(x_0,y_0)\in\mathcal{E}$ تحقق معادلته أي $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$

إذن معادلة المماس $\frac{x_0\cdot x}{a^2}+\frac{y_0\cdot y}{b^2}=1$......✪

مناقشة الشرط $y_0\neq 0$: من أجل $y_0=0$ نجد نقطتين التّماس هما الرأسين $(\pm a,0)$

والمماس عند $A(a,0)$ هو $x=a$ وعندما نبدل $A(a,0)$ في المعادلة ✪ نجد المعادلة $x=a$

والمماس عند $A'(-a,0)$ هو $x=-a$ وعندما نبدل $A'(-a,0)$ في المعادلة ✪ نجد المعادلة $x=-a$

النتيجة أياً كانت $M(x_0,y_0)\in\mathcal{E}$ فإن معادلة المماس عندها هي المعادلة ✪

تمرين 2 : برهن أن مجموعة النّقاط التي يرى منها القطع النّاقص $\mathcal{E}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ضمن زاوية قائمة هي الدّائرة الّتي معادلتها $x^2+y^2=a^2+b^2$

البرهان : المماس من الشّكل $m\neq 0$: $y=mx+h$ بالحل المشترك مع القطع

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+h)^2}{b^2}=1$$

ومنه $b^2x^2+a^2(mx+h)^2=a^2b^2$

$$b^2x^2+a^2m^2x^2+2a^2mxh+a^2h^2-a^2b^2=0$$

$$\left(b^2+a^2m^2\right)x^2+2a^2mhx+a^2\left(h^2-b^2\right)=0$$

شرط التّماس وجود جذر مضاعف $\Delta=0$

$$\left(2a^2mh\right)^2-4a^2\left(b^2+a^2m^2\right)\left(h^2-b^2\right)=0$$

$$4a^4m^2h^2-4a^2b^2h^2+4a^2b^4-4a^4m^2h^2+4a^4m^2b^2=0$$

$-h^2+b^2+a^2m^2=0$ ومنه $h=\pm\sqrt{b^2+a^2m^2}$

المماس الأول $y=mx\pm\sqrt{b^2+a^2m^2}$.........❶

هذه المعادلة صيغة قياسية لكل مماس للقطع الناقص عندما يكون ميل المماس هو m

المماس العمودي على المماس الأول يكون ميله $-\frac{1}{m}$ نبدل في ❶ كل m بـ $-\frac{1}{m}$

نجد المماس الثاني العمود على المماس الأول: $y=-\frac{1}{m}x\pm\sqrt{a^2+b^2\frac{1}{m^2}}$......❷

كي نوجد نقطة تقاطع المماسين المتعامدين نحل جملة المعادلتين ❶ و ❷

من ❶ $y-mx=\pm\sqrt{b^2+a^2m^2}$ بالتّربيع $y^2-2mxy+m^2x^2=b^2+a^2m^2$......❸

من ❷ $my=-x\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}$

أو $my+x=\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}$ بالتّربيع $m^2y^2-2mxy+x^2=a^2+b^2m^2$......❹

بجمع ❸ و ❹ نجد $x^2+y^2+m^2y^2+m^2x^2=a^2+b^2+m^2a^2+m^2b^2$

وتكتب $\left(x^2+y^2\right)(1+m^2)=\left(a^2+b^2\right)(1+m^2)$ بالتقسيم على $1+m^2\neq 0$ نجد $x^2+y^2=a^2+b^2$

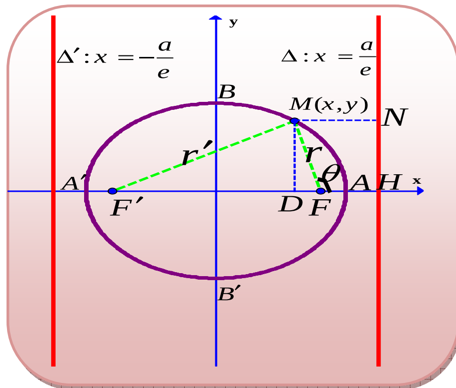
مناقشة الشرط $m\neq 0$ عندما: $m=0$ نجد المماسات في القطبين $(0,\pm b)$ هي $y=\pm b$ تعامد المماسات التي ميلها غير معرف في الرّأسين $(\pm a,0)$ وهي $x=\pm a$

ونقط تقاطع هذه المماسات (a,b) , $(a,-b)$,$(-a,b)$,$(-a,-b)$

وهذه النّقاط تقع على الدّائرة $x^2+y^2=a^2+b^2$

النّتيجة : مجموعة النّقاط التي يرى منها القطع النّاقص $\mathcal{E}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ضمن زاوية قائمة هي الدّائرة $x^2+y^2=a^2+b^2$

تمرين 3 : ليكن القطع النّاقص $a>b$: $\mathcal{E}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ برهن أن نصف القطر المحرقي $r=FM$ الّذي يصنع زاوية θ مع محور الفواصل أي $\theta=\left(\overrightarrow{ox},\overrightarrow{FM}\right)$ يعطى بالقانون $r=\frac{b^2}{a-c\cdot\cos\theta}$



الحل: نعلم أن $e=\frac{MF}{MN}$ أو $eMN=MF$

لكن $MN=DH$ و $MF=r$ ومنه $e\overline{DH}=r$

أي $e\left(\overline{DF}+\overline{FH}\right)=r$ لكن $FH=\frac{a}{e}-c$ و $\overline{DF}=r\cos\theta$

ومنه $e\left(r\cos\theta+\frac{a}{e}-c\right)=r$ ومنه $r\cdot e\cdot\cos\theta+a-ec=r$

تكتب $a-ec=r(1-e\cdot\cos\theta)$

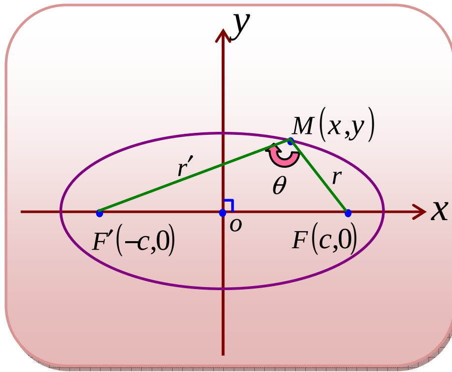
$$a-\frac{c}{a}c=r(1-\frac{c}{a}\cdot\cos\theta)$$

نضرب الطرفين بالعدد a مع ملاحظة $b^2=a^2-c^2$

$b^2=r(a-c\cdot\cos\theta)$ ومنه $r=\dfrac{b^2}{a-c\cdot\cos\theta}$

تمرين 4 : ليكن القطع النّاقص $\varepsilon:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ :a>b$ ولتكن $\theta=\widehat{FMF'}$ برهن أن $b^2=r\cdot r'\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

الحل:



حسب قاعدة التّجيب في المثلّث FMF'

$$\overline{FF'}^2=\overline{FM}^2+\overline{MF'}^2-2MF\cdot MF'\cos\theta$$

أي $4c^2=r^2+r'^2-2r\cdot r'\cos\theta$

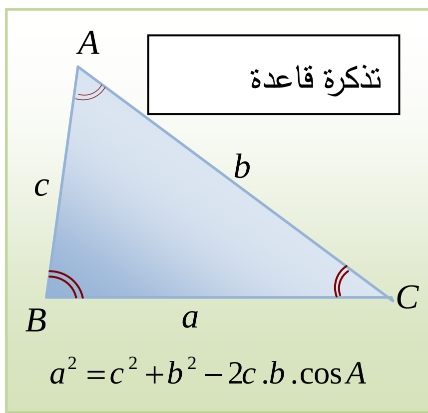
لكن $r+r'=2a$ ومنه $(r+r')^2=4a^2$

أي $r^2+r'^2=4a^2-2r\cdot r'$ بالتّعويض نجد

$$4c^2=4a^2-2r\cdot r'-2r\cdot r'\cos\theta$$

أي $4a^2-4c^2=2r\cdot r'(1+\cos\theta)$

$4b^2=4r\cdot r'\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ أو $b^2=r\cdot r'\cos^2\dfrac{\theta}{2}$



تمرين 5 برهن أن المحل الهندسي لمنتصفات الأوتار المحرقية للقطع الناقص

$\mathcal{E}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ هي القطع الناقص $\frac{(x-\frac{c}{2})^2}{\frac{c^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{b^2c^2}{4a^2}}=1$

محرق القطع $F(c,0)$ وحزمة المستقيمات المارة منه

$$\begin{cases} y=m(x-c)..① \\ \text{مـــع} \\ x=c..............② \end{cases}$$

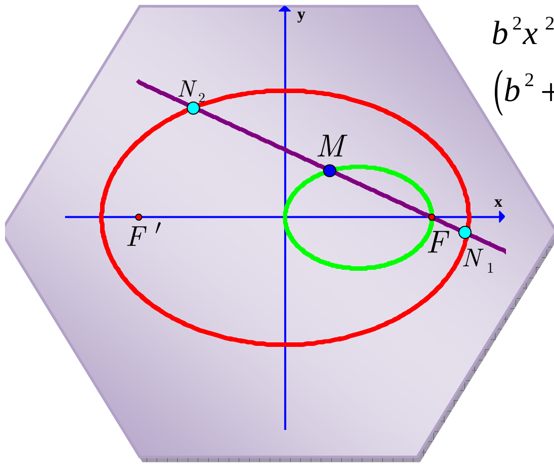
بالحل المشترك للمعادلة ① مع معادلة القطع

نجد بتعويض ① في معادلة القطع $\mathcal{E}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{m^2(x-c)^2}{b^2}=1$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{m^2(x-c)^2}{b^2}=1$$

$$b^2x^2+m^2a^2x^2-2m^2a^2cx+m^2c^2a^2=a^2b^2$$

$$(b^2+m^2a^2)x^2-2m^2a^2cx+m^2c^2a^2-a^2b^2=0$$



يوجد وتر $[N_1N_2]$ إذا كان مميز المعادلة $\Delta\geq 0$ أي

$$\Delta=4m^4a^4c^2-4(b^2+m^2a^2)(m^2c^2a^2-a^2b^2)$$

$$\Delta=b^2a^2(b^2+(a^2-c^2)m^2)=b^2a^2(b^2+b^2m^2)$$

$b^2a^2(b^2+b^2m^2)\geq 0$ محققة أياً كانت $m\in\mathbb{R}$

وجذرا المعادلة هما طرفا الوتر المحرقي

وفاصلة M منتصف الوتر المحرقي $[N_1N_2]$ هي $x=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}=\frac{m^2a^2c}{b^2+m^2a^2}$

نعوض في ① نجد $y=m(\frac{m^2a^2c}{b^2+m^2a^2}-c)$ أو $y=-\frac{b^2cm}{b^2+m^2a^2}$

المعادلات الوسيطية للنقطة M منتصف الوتر المحرقي $[N_1N_2]$ هي

$\begin{cases} x = \dfrac{m^2a^2c}{b^2+m^2a^2} \\ y = -\dfrac{mb^2c}{b^2+m^2a^2} \end{cases}$: $m \in \mathbb{R}$ مع $x \neq c$ (لأنه عندما $x = c$ سنجد $b = 0$)

$m = -\dfrac{xb^2}{ya^2}$ نبدل $y = m(x-c)$ نجد $y = -\dfrac{xb^2}{ya^2}(x-c)$

ومنه $a^2x^2 + b^2y^2 - a^2cx = 0$ ومنه

$$b^2(x^2 - cx) + a^2y^2 = 0$$

$$b^2(x - \frac{c}{2})^2 - b^2\frac{c^2}{4} + a^2y^2 = 0$$

$$b^2(x - \frac{c}{2})^2 + a^2y^2 = b^2\frac{c^2}{4}$$

$$\frac{(x-\frac{c}{2})^2}{\frac{c^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{b^2c^2}{4a^2}} = 1$$

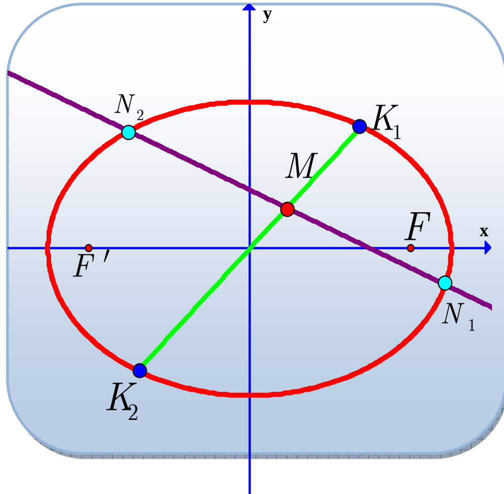
حامل المحل الهندسي هو القطع الناقص $\dfrac{(x-\frac{c}{2})^2}{\frac{c^2}{4}} + \dfrac{y^2}{\frac{b^2c^2}{4a^2}} = 1$ عدا النقطة $(c,0)$

ومن أجل المستقيم ②, $x = c$ فهو يحدد وتراً منتصفه $(c,0)$

المحل الهندسي المطلوب هو كامل القطع الناقص $\dfrac{(x-\frac{c}{2})^2}{\frac{c^2}{4}} + \dfrac{y^2}{\frac{b^2c^2}{4a^2}} = 1$

تمرين 6 برهن أن المحل الهندسي لمنتصفات الأوتار الموازية للمستقيم $\Delta : y = mx$ للقطع الناقض $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ هي قطعة مستقيمة

حزمة المستقيمات الموازية $\Delta : y = mx$ هي $y = mx + h .....①$



بالحل المشترك للمعادلة ① مع معادلة القطع

نجد بتعويض ① في معادلة القطع $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+h)^2}{b^2} = 1$$
$$b^2x^2 + m^2a^2x^2 - 2ma^2hx + h^2a^2 = a^2b^2$$
$$\left(b^2 + m^2a^2\right)x^2 - 2ma^2hx + h^2a^2 - a^2b^2 = 0$$

يوجد وتر $[N_1N_2]$ إذا كان مميز المعادلة $\Delta \geq 0$ أي

$$\Delta = 4m^2a^4h^2 - 4\left(b^2 + m^2a^2\right)\left(h^2a^2 - a^2b^2\right)$$
$$= 4m^2a^4h^2 - 4b^2h^2a^2 - 4m^2a^4h^2 + 4b^4a^2 + 4m^2a^4b^2$$
$$\Delta = -4b^2h^2a^2 + 4b^4a^2 + 4m^2a^4b^2 = 4a^2b^2\left(-h^2 + b^2 + m^2a^2\right)$$

$-h^2 + b^2 + m^2a^2 \geq 0$ محققة أياً كانت $h \in \left[-\sqrt{b^2 + m^2a^2} , b^2 + m^2a^2\right]$

وجذرا المعادلة هما طرفا الوتر المحرقي

وفاصلة M منتصف الوتر المحرقي $[N_1N_2]$ هي $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} = \frac{ma^2h}{b^2 + m^2a^2}$

نعوض في ① نجد $y = m\frac{ma^2h}{b^2 + m^2a^2} - h$ أو $y = -\frac{b^2h}{b^2 + m^2a^2}$

المعادلات الوسيطية للنقطة M منتصف الوتر المحرقي $[N_1N_2]$ هي

$$\begin{cases} x = \dfrac{ma^2h}{b^2+m^2a^2} \\ y = -\dfrac{b^2h}{b^2+m^2a^2} \end{cases} \quad : \quad h \in \left[-\sqrt{b^2+m^2a^2} \ , \sqrt{b^2+m^2a^2}\right]$$

بحذف الوسيط $y = -\dfrac{b^2}{a^2m}x : m \neq 0$ الحامل الهندسي مستقيم

$$x = \frac{ma^2}{b^2+m^2a^2}h$$

$$h \in \left[-\sqrt{b^2+m^2a^2} \ , \sqrt{b^2+m^2a^2}\right]$$

فإن المحل الهندسي القطعة المستقيمة $y = -\dfrac{b^2}{a^2m}x$ و $x = \left[-\dfrac{ma^2}{\sqrt{b^2+m^2a^2}}, \dfrac{ma^2}{\sqrt{b^2+m^2a^2}}\right]$

عندما $m > 0$

أو المحل الهندسي القطعة المستقيمة $y = -\dfrac{b^2}{a^2m}x$ $x = \left[\dfrac{ma^2}{\sqrt{b^2+m^2a^2}}, -\dfrac{ma^2}{\sqrt{b^2+m^2a^2}}\right]$

عندما $m < 0$

أما عندما $m = 0$ المعادلات الوسيطية

$$m = 0 \begin{cases} x = 0 \\ y = -h \end{cases} \quad : \quad h \in [-b \ , b]$$

المحل الهندسي القطعة المستقيمة $[BB']$

حيث $B(0,b) \ , B'(0,-b)$

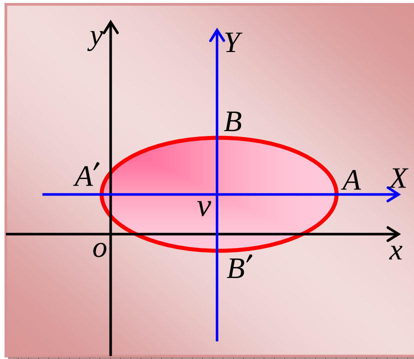
المحل الهندسي هو القطعة المستقيمة $K_1 \ , K_2$

حيث $K_1\left(\dfrac{ma^2}{\sqrt{b^2+m^2a^2}}, -\dfrac{b^2}{\sqrt{b^2+m^2a^2}}\right) \ , K_2\left(-\dfrac{ma^2}{\sqrt{b^2+m^2a^2}}, \dfrac{b^2}{\sqrt{b^2+m^2a^2}}\right)$

الصّيغة القياسية لمعادلة قطع ناقص

في مستوٍ منسوب لمعلم متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$، قطع ناقص مركزه $v(x_o, y_o)$، محوره المحرقي يوازي المحور $x'x$ ولتكن الجملة $(X'vX, Y'vY)$ صورة الجملة $(x'ox, y'oy)$ وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{ov}$ فتكون دساتير سحب المحاور

$$\left.\begin{array}{l} X = x - x_o \\ Y = y - y_o \end{array}\right\}$$



معادلة القطع في الجملة XvY:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

نبدل دساتير سحب المحاور:

✪... $$\boxed{\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1}$$

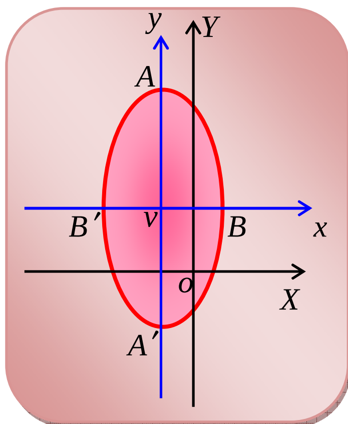
تسمّي المعادلة ✪ الصّيغة القياسيّة لمعادلة قطع ناقص محوره المحرقي يوازي المحور $x'x$

ومركزه النّقطة $v(x_o, y_o)$، محرقاه $F(x_0+c, y_0)$, $F'(x_0-c, y_0)$

الرأسين $A(x_0+a, y_0)$، $A'(x_0-a, y_0)$ والقطبين $B(x_0, y_0+b)$ ، $B'(x_0, y_0-b)$

الدليلين $\Delta: x = x_0 - \frac{a}{e}$, $\Delta: x = x_0 + \frac{a}{e}$

وسنجد بنفس الطّريقة الصّيغة القياسيّة لمعادلة قطع ناقص محوره المحرقي يوازي المحور $y'y$ ومركزه النّقطة $v(x_o, y_o)$



$$\boxed{\frac{(y - y_o)^2}{a^2} + \frac{(x - x_o)^2}{b^2} = 1}$$

فيكون محرقاه $F(x_0, y_0+c)$, $F'(x_0, y_0-c)$

الرأسين $A(x_0,y_0+a)$ ، $A'(x_0,y_0-a)$

والقطبين $B(x_0+b,y_0)$ ، $B'(x_0-b,y_0)$

الدليلين $\Delta: y=y_0-\frac{a}{e}$, $\Delta: y=y_0+\frac{a}{e}$

ملاحظة :يمكن إيجاد المعادلة القياسية بالطريقة ذاتها التي وجدنا من خلالها المعادلة المختزلة

يمكن تلخيص الدّراسة السّابقة بالجّدول الآتي :

الشّكل والمعادلة	الرّأسين	القطبين	المحرقين	الدّليلين	نصفا القطرين المحرقيين
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$	$A(x_0+a,y_0)$ $A'(x_0-a,y_0)$	$B(x_0,y_0+b)$ $B'(x_0,y_0-b)$	$F(x_0+c,y_0)$ $F'(x_0-c,y_0)$	$\Delta: x=x_0+\frac{a}{e}$ $\Delta': x=x_0-\frac{a}{e}$	$r=a-e(x-x_0)$ $r'=a+e(x-x_0)$
$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}+\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$	$A(x_0,y_0+a)$ $A'(x_0,y_0-a)$	$B(x_0+b,y_0)$ $B'(x_0-b,y_0)$	$F(x_0,y_0+c)$ $F'(x_0,y_0-c)$	$\Delta: y=y_0+\frac{a}{e}$ $\Delta': y=y_0-\frac{a}{e}$	$r=a-e(y-y_0)$ $r'=a+e(y-y_0)$

الأمثلة :

مثال 1 :

أوجد معادلة القطع النّاقص الذي مركزه $V(2,1)$ ، ورأسه $A(2,6)$ ، $c=4$

ثُمّ عيّن الرأس الآخر، وقطبيه ومِحرقيه، واختلافه المركزي، ومعادلتي دليليه،

وطولي نصفي القطرين المِحرقيين عند نقطة M منه فاصلتها $x=\frac{19}{5}$ وارسم هذا القطع.

الحل:

نلاحظ أنّ $x_o=x_A=2$ فالمحور المِحرقي يوازي $y'y$ و $b^2=a^2-c^2$

و معادلة القطع من الصيغة $\frac{(x-x_o)^2}{b^2}+\frac{(y-y_o)^2}{a^2}=1$

إنّ: $y_A=y_o+a$ ومنه: $a=5$ بالفرض $c=4$ وبالتّالي: $b=3$

معادلة القطع هي: $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}+=1$

الرّأس الآخر $A'(x_o,y_o-a)$ ومنه: $A'(2,-4)$

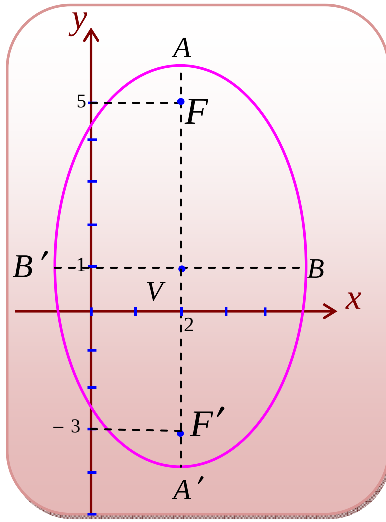
القطبين $B(x_o+b,y_o)$ ومنه: $B(5,1)$ $B'(x_o-b,y_o)$ ومنه: $B'(-1,1)$

محرقاه: $F(x_o,y_o+c)$ ومنه: $F(2,5)$ $F'(x_o,y_o-c)$ ومنه: $F'(2,-3)$

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$

لحساب ترتيب النّقطة M نعوّض $x=\frac{19}{5}$ في معادلة القطع نجد:

$$\frac{\left(\frac{19}{5}-2\right)^2}{9}+\frac{\left(y-1\right)^2}{25}=1$$ ومنه $$\frac{(y-1)^2}{25}=1-\frac{9}{25}$$ أو $$(y-1)^2=16$$



ومنه: $y=5$ أو: $y=-3$

$$r=a-e\left(y-y_o\right)\ ,\ r'=a+e\left(y-y_o\right)$$

من أجل $y=5$ نجد:

$$r=5-\frac{4}{5}(4)=\frac{9}{5}\ \ ,\ \ r'=5+\frac{4}{5}(4)=\frac{41}{5}$$

من أجل $y=-3$ نجد:

$$r=5-\frac{4}{5}(-4)=\frac{41}{5}\ \ ,\ \ r'=5+\frac{4}{5}(-4)=\frac{9}{5}$$

الدّليلين $$\Delta:y=y_0+\frac{a}{e}\ \ ,\ \ \Delta':y=y_0-\frac{a}{e}$$

$$\Delta:y=1+\frac{25}{4}\ \ ,\ \ \Delta':y=1-\frac{25}{4}$$

$$\Delta:y=\frac{29}{4}\ \ ,\ \ \Delta':y=-\frac{21}{4}$$

مثال ❷:

أوجد معادلة القطع النّاقص الذي محرقه $F(2,1)$ ، ورأسه $A(3,1)$، $a+b=2c$

ثُمّ عيّن الرأس الآخر، وقطبيه ومِحرقه الآخر، واختلافه المركزي، ومعادلتي دليليه،

ونصفي القطرين المِحرقيين عند نقطة M منه فاصلتها $x=-4$ وارسم هذا القطع.

الحل : لدينا $F(2,1)$ و$A(3,1)$ على المستقيم $y=1$ فالمحور المحرقي يوازي $x'x$ و $y_0=1$

و معادلة القطع من الصيغة $\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1$

$F(2,1)$ و $F(x_0+c,y_0)$ يكون $x_0+c=2$.....❶

$A(3,1)$ و $A(x_0+A,y_0)$ يكون $x_0+a=3$.....❷

بطرح ❶ من ❷ نجد $a-c=1$....❸ ولدينا بالفرض $a+b=2c$......❹ و $a^2-b^2=c^2$....❺

تكتب $a=c+1$....❸ نعوض في ❹ نجد $b=c-1$ تعوض هاتين النتيجتين في ❺ نجد

$(c+1)^2-(c-1)^2=c^2$ ومنه $4c=c^2$ أي $c(c-4)=0$ و $c\neq 0$ تكون $c=4$

بالتعويض في ❶ نجد $x_0=-2$ ومن ❷ نجد $a=5$ وبالتعويض في ❹ نجد $b=3$

معادلة القطع $\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$

مركزه $V(-2,1)$

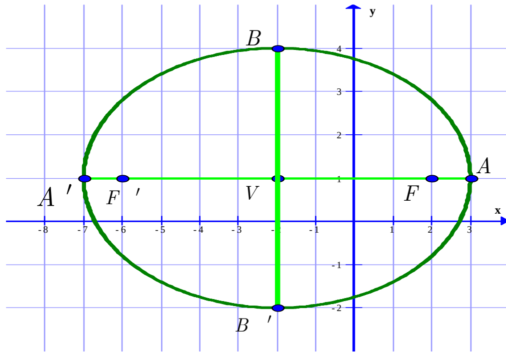
الرّأس الآخر $A'(x_o+a,y_o)$ ومنه: $A'(-7,1)$

القطبين $B\left(x_o,y_o+b\right)$ ومنه: $B\left(-2,4\right)$ $B'\left(x_o,y_o-b\right)$ ومنه: $B'\left(-2,-2\right)$

محرقه الآخر: $F'\left(x_o-c,y_o\right)$ ومنه: $F'\left(-6,1\right)$

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$

الدّليلين $\Delta:x=x_0+\frac{a}{e}$, $\Delta':x=x_0-\frac{a}{e}$



$\Delta:x=-2+\frac{25}{4}$, $\Delta':x=-2-\frac{25}{4}$

$\Delta:x=\frac{17}{4}$, $\Delta':x=-\frac{33}{4}$

$r=a-e\left(x-x_o\right)$, $r'=a+e\left(x-x_o\right)$

من أجل $x=-4$ نجد:

$r=5-\frac{4}{5}(-2)=\frac{33}{5}$, $r'=5+\frac{4}{5}(-2)=\frac{17}{5}$

الصّيغة العامّة لمعادلة القطع النّاقص

إذا نشرنا الأقواس للمعادلة $\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1$ أو المعادلة $\frac{(y-y_o)^2}{a^2}+\frac{(x-x_o)^2}{b^2}=1$

وبعد الاختزال تصبح معادلة القطع النّاقص

$\boxed{a_1x^2+b_1y^2+c_1x+d_1y+e_1=0}$ $:(a_1b_1>0)\ ,\ a_1\neq b_1$

تُسمّي هذه المعادلة الصّيغة العامّة لمعادلة القطع النّاقص

وبالعكس:

كل معادلة من الشّكل: $\boxed{a_1x^2+b_1y^2+c_1x+d_1y+e_1=0}$ مع $a_1\neq b_1$ و a_1,b_1 من المجال $]0,+\infty[$

ترد بالإتمام لمربّعين كاملين إلى الشّكل : $a_1(x-x_o)^2+b_1(y-y_o)^2=k$

وهنا نميّز الحالات الآتية:

- $k<0$ المعادلة تُمثِّل المجموعة الخالية.
- $k=0$ المعادلة تُمثِّل نقطة واحدة هي $V(x_o,y_o)$.
- $k>0$ المعادلة تكتب $\frac{(x-x_o)^2}{\frac{k}{a_1}}+\frac{(y-y_o)^2}{\frac{k}{b_1}}=1$

فهي من الصّيغة $\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1$ أو $\frac{(y-y_o)^2}{a^2}+\frac{(x-x_o)^2}{b^2}=1$

تُمثِّل قطعاً ناقصاً مركزه $V(x_o,y_o)$

.

مثال(1)

عيّن بحسب قيم $\lambda \in \mathbb{R}$ مجموعة النّقط التي تمثلها المعادلة:

$$5x^2+9y^2-30x+18y=\lambda$$

من أجل $\lambda=-9$ تُمثّل قطعاً ناقصاً عيّن مركزه، ورأسيه وقطبيه، مِحرقيه وارسمه.

الحل: نرد المعادلة إلى الشّكل النّموذجي كما يأتي:

$$5x^2-30x+9y^2+18y=\lambda$$
$$5\left(x^2-6x+9\right)+9\left(y^2+2y+1\right)=45+9+\lambda$$
$$5(x-3)^2+9(y+1)^2=54+\lambda$$

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{5}=1$$

بالموازنة مع الصّيغة القياسيّة لمعادلة القطع النّاقص، نجد أنّ المعادلة تُمثِّل قطعاً ناقصاً مركزه $V(3,-1)$ و $a^2=9\ ,b^2=5$ أي $a=3\ ,\ b=\sqrt{5}$

محوره المِحرقي يوازي $x'x$. ويكون $c^2=a^2-b^2=4$ أي $c=2$

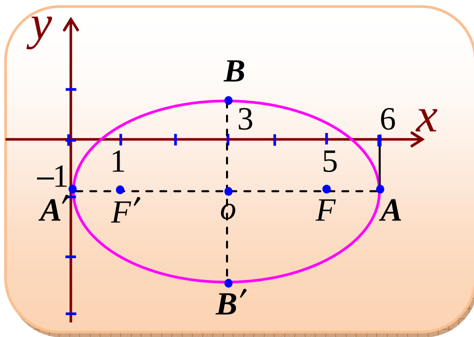
رأسيه: $A(x_o+a,y_o)\ ,\ A'(x_o-a,y_o)$

ومنه: $A(6,-1)\ ,\ A'(0,-1)$

قطبيه: $B'(x_o,y_o-b)\ ,\ B(x_o,y_o+b)$ ومنه $B'(3,-1-\sqrt{5})\ ,\ B(3,-1+\sqrt{5})$

محرقا القطع: $\left.\begin{matrix} F(x_o+c,y_o)\ ,\ F'(x_o-c,y_o) \\ F(5,-1)\ ,\ F'(1,-1)\end{matrix}\right\}$

الرسم :



مثال(2)

عيّن بحسب قيم $\lambda \in \mathbb{R}$ مجموعة النّقط التي تمثّلها المعادلة:

$$25x^2+9y^2+50x-36y+\lambda=0$$

من أجل $\lambda=-164$ تأكد أن كلاً من النّقطتين $B(2,2)$, $N\left(\frac{4}{5},6\right)$ هي نقطة من نقاط القطع

ثم أوجد معادلتي المماسين للقطع في كل منهما ، ثُمّ أوجد معادلة المماس للقطع الموازي للماس في N.

الحل:

بالإتمام إلى مربّعين كاملين نجد:

$$25\left(x^2+2x+1-1\right)+9\left(y^2-4y+4-4\right)+\lambda=0$$
$$25(x+1)^2+9(y-2)^2=61-\lambda$$

1) $\lambda=61$ المعادلة تتحقق إذا وفقط إذا كان $x=-1 \ , \ y=2$

إذاً المعادلة تمثّل نقطة واحدة هي: $\{V(-1,2)\}$

2) $\lambda>61$ المعادلة لا تتحقق أياً كانت $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ إذاً مجموعة النّقط هي ϕ

3) $\lambda<61$ المعادلة تُمثّل قطعاً ناقصاً مركزه $V(-1,2)$ ومحوره المحرقي يوازي $y'y$.

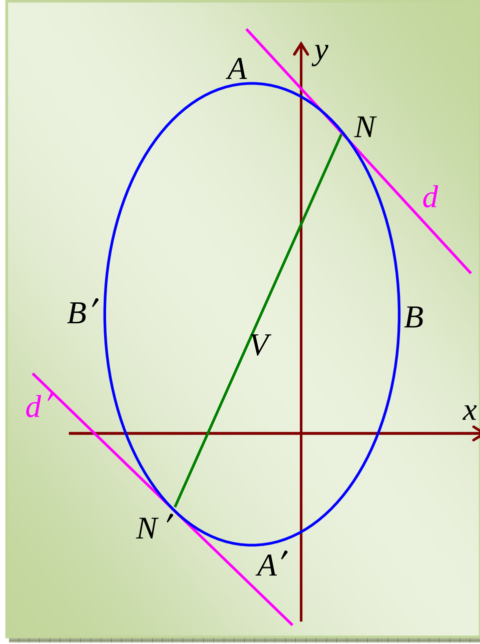
الرسم:

نلاحظ أنّ $B(2,2)$ هي أحد بطني القطع فالمماس فيها

يوازي المحور $y'y$ ومعادلته $x=x_B \Rightarrow \boxed{x=2}$

نعوّض إحداثيي N في معادلة القطع نجد أنّها محققة.

إذاً N تنتمي للقطع.



نشتق معادلة القطع النّاقص بالنّسبة إلى x نجد:

$$50x+18yy'_x+50-36y'_x=0$$

نعوض النقطة $N\left(\frac{4}{5},6\right)$ نجد $40+108m+50-36m=0$

نجد $m=-\frac{5}{4}$ معادلة المماس في N:

$$y-y_N=m\left(x-x_N\right)$$

بالتّعويض: $y-6=-\frac{5}{4}\left(x-\frac{4}{5}\right)$

$$d: y=-\frac{5}{4}x+7$$

بما أن القطع النّاقص متناظر بالنّسبة إلى مركزه $V\ (-1,2)$ ومنه صورة المماس d في N وفق تناظرٍ مركزه V هو مماس d' للقطع في N' صورة N وفق هذا التّناظر،

وبما أن التّناظر تقايس فإن d' يوازي d .

إحداثيات N' هي:

$$\left.\begin{array}{l} x_{N'}=2x_0-x_N=-\frac{14}{5} \\ y_{N'}=2y_0-y_N=-2 \end{array}\right\},\ N'\left(\frac{-14}{5},-2\right)$$

معادلة d' هي $y+2=-\frac{5}{4}\left(x+\frac{14}{5}\right)$ أو $y=-\frac{5}{4}x-\frac{11}{2}$

أو دساتير التّناظر $\left.\begin{array}{l} x'=2x_0-x \\ y'=2y_0-y \end{array}\right\}$ مركز التّناظر $V\ (-1,2)$ أي $\left.\begin{array}{l} x=-2-x' \\ y=4-y' \end{array}\right\}$

بالتّعويض في معادلة $d: y=-\frac{5}{4}x+7$ نجد $4-y'=-\frac{5}{4}(-2-x')+7$

ومنه بالإصلاح $y'=-\frac{5}{4}x'-\frac{11}{2}$ وبالتّالي $d': y=-\frac{5}{4}x-\frac{11}{2}$

التّمثيل الوسيطي للقطع النّاقص مركزه $V\left(x_0, y_0\right)$

بموازنة معادلة القطع النّاقص: $\frac{\left(x-x_o\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y-y_o\right)^2}{b^2}=1$

مع المتطابقة المثلّثية : $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

يوجد $\theta\in\mathbb{R}$ بحيث: $\frac{x-x_o}{a}=\cos\theta$ و $\frac{y-y_o}{b}=\sin\theta$

ومنه: $\theta\in\mathbb{R}:$ $\begin{Bmatrix} x=x_o+a\cos\theta \\ y=y_o+b\sin\theta \end{Bmatrix}$

نُسمِّي هاتين المعادلتين معادلتين وسيطيّتين للقطع النّاقص محوره المحرقي يوازي $x'x$

لاحظ أن هذا التمثيل الوسيطي ليس وحيداً إذ أننا يمكن اختيار $\frac{x-x_o}{a}=-\cos\theta$ و $\frac{y-y_o}{b}=\sin\theta$

أو $\frac{x-x_o}{a}=\sin\theta$ و $\frac{y-y_o}{b}=\cos\theta$ وغيرها من عملية موازنة معادلة القطع مع $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

مثال : اكتب تمثيلاً وسيطياً لمجموعة النقط التي تمثلها المعادلة $\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$

الحل : بموازنة معادلة القطع مع المتطابقة المثلّثية : $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

نفرض $\frac{x+3}{5}=\cos\theta$ و $\frac{y-1}{4}=\sin\theta$ حيث $\theta\in\mathbb{R}$

يكون التمثيل الوسيطي لمجموعة نقط القطع الناقص المفروض

$\theta\in\mathbb{R}:$ $\begin{Bmatrix} x=-3+5\cos\theta \\ y=1+4\sin\theta \end{Bmatrix}$

وبالعكس إذا أُعطينا معادلتين وسيطيّتين $\theta\in\mathbb{R}:$ $\begin{Bmatrix} x=x_o+a\cos\theta \\ y=y_o+b\sin\theta \end{Bmatrix}$

نجد من الأولى $\frac{x-x_o}{a}=\cos\theta$ ومن الثانية $\frac{y-y_o}{b}=\sin\theta$ بالتربيع والجمع نجد المعادلة

$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1$ معادلة قطع ناقص مركزه $V\ (x_o,y_o)$

أمّا إذا كان المحور المحرقي يوازي $y\acute{y}$ فإنّ معادلته $\frac{(y-y_o)^2}{a^2}+\frac{(x-x_o)^2}{b^2}=1$

له معادلتين وسيطيتين $\theta\in\mathbb{R}:$ $\begin{cases} x=x_o+b\cos\theta \\ y=y_o+a\sin\theta \end{cases}$.

مثال:

في مستوٍ محدث بمعلمٍ متجانس، لتكن مجموعة النّقط $M\ (x,y)$ المُعيّنة بالعلاقتين:

❶... $x=2+3\cos 2\theta$

❷... $y=-3+5\sin 2\theta$

أوجد المعادلة الديكارتية لمجموعة هذه النقط

الحل:

بحذف الوسيط بينهما نجد:

من ❶ نجد: $\frac{x-2}{3}=\cos 2\theta$

من ❷ نجد : $\frac{y+3}{5}=\sin 2\theta$

بالتّربيع والجمع نجد: $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{25}=1$

وهي المعادلة الديكارتية للقطع النّاقص الذي مركزه $V\ (2,-3)$ ومحوره المِحرقي يوازي $y\acute{y}$.

القطع الناقص اجتماع دالتين:

لتكن المعادلة $\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1$ تكتب $\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1-\frac{(x-x_o)^2}{a^2}$

ومنه $(y-y_o)^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-(x-x_o)^2\right)$ أي $y-y_o=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-x_o)^2}$

القطع الناقص اجتماع دالتين $y=y_0+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-x_o)^2}$ و $y=y_0-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-x_o)^2}$

وهاتين الدالتين معرفتين على المجال $[-a,a]$

والمعادلة $\frac{(x-x_o)^2}{b^2}+\frac{(y-y_o)^2}{a^2}=1$ أيضاً اجتماع دالتين

$y=y_0+\frac{a}{b}\sqrt{b^2-(x-x_o)^2}$ و $y=y_0-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-(x-x_o)^2}$

وهاتين الدالتين معرفتين على المجال $[-b,b]$

أما الخط البياني للدالتين إذا لاحظنا أن معادلة المحور الأفقي للقطع هي $y=y_0$

أحدهما يقع فوق المحورالأفقي للقطع والآخر يقع تحت المحور الأفقي للقطع

(نقط المحور الأفقي نقط مشتركة للدالتين)

وبالعكس الدالة التي معادلتها $y=f(x)$ و $f(x)=\lambda\sqrt{ax^2+bx+c}+\beta$ حيث a,b,c,λ,β أعداد حقيقية و $\lambda\neq 0$ و $a<0$ و $\Delta=b^2-4a\cdot c>0$ تمثل نصف قطع ناقص محوره الأفقي $y=\beta$

ويكون خطه البياني فوق المحور الأفقي عندما $\lambda>0$ و تحت المحور الأفقي عندما $\lambda<0$

مثال : بين ان مجموعة النقط	$M(x,y)$	الممثلة بالمعادلة	$y=2-\frac{5}{3}\sqrt{8-x^2-2x}$

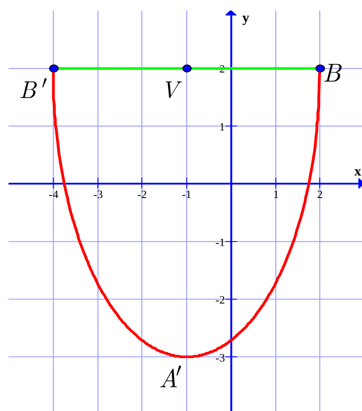
هي نصف قطع ناقص وارسم مجموعة النقط عين مركز القطع ومحرقيه وارسم الدالة

الحل : تكتب الدالة $y=2-\frac{5}{3}\sqrt{8-x^2-2x}$ على الشكل $y-2=-\frac{5}{3}\sqrt{-(x+1)^2+9}$

معرفة بشرط $\left(y-2\le 0 \text{ و } -(x+1)^2+9\ge 0\right)$

أي $\left(y\le 2 \text{ و } -4\le x\le 2\right)$

بتربيع الطرفين



$$(y-2)^2=\frac{25}{9}\left(-(x+1)^2+9\right)$$

نكتبها $\frac{(y-2)^2}{25}+\frac{(x+1)^2}{9}=1$

هذه المعادلة معادلة قطع ناقص مركزه $V(-1,2)$

محوره المحرقي يوازي $y\acute{y}$

بما أن $y\le 2$ فإن الخط البياني (مجموعة النقط $M(x,y)$) هي نصف القطع الناقص

$\frac{(y-2)^2}{25}+\frac{(x+1)^2}{9}=1$ والواقعة تحت قطره الأفقي $[BB']$ مع طرفي القطر الأفقي

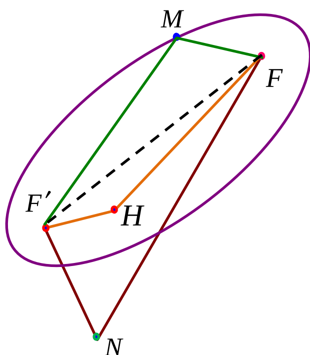
قوة نقطة بالنسبة إلى قطع ناقص

نعرف قوة نقطة بالنسبة إلى قطع ناقص بأنها الفرق بين مجموع بعدي النقطة عن المحرقين وطول البعد بين الرأسين

إذا كان F, F' محرقي قطع ناقص والبعد بين رأسيه $2a$ فإن قوة النقطة M بالنسبة لهذا القطع

$$f(M)=MF'+MF-2a$$

نتيجة :



① تكون النقطة M تنتمي للقطع إذا وفقط إذا كانت $f(M)=0$

لأن $MF'+MF=2a$

② تكون النقطة H داخل القطع إذا وفقط إذا كانت $f(H)<0$

لأنه حسب المتراجحات في المثلث $HF'+HF<2a$

③ تكون النقطة N خارج القطع إذا وفقط إذا كانت $f\ (N\ )>0$

لأنه حسب المتراجحات في المثلث $NF'+NF>2a$

نتيجة :

عندما نحدث مستوي القطع النّاقص بمعلمٍ متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ بحيث ينطبق المحور $x\acute{x}$ على المحور المِحرقي وموجه من F' إلى F ، والمحور $y\acute{y}$ منطبق على المحور اللامِحرقي والبعد بين رأسي القطع الناقص $AA'=2a$ والبعد المحرقي $FF'=2c$ وكان $b^2=a^2-c^2$ وكانت $M\ (x\ ,y\ )$

فإن $MF'+MF=2a$ تكافئ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ وبالتالي فإن إشارة $f\ (M\ )=MF'+MF-2a$

من إشارة $f\ (x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$ والتي تعبر عن قوة النقطة $M\ (x\ ,y\ )$ تحليلياً

وإشارة $f_1(x,y)=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2$ هي أيضاً إشارة $f\ (x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$

أي أنه لمعرفة الوضع النسبي لنقطة $M\ (x_1,y_1)$ بالنسبة لقطع ناقص نكتب معادلة القطع $f\ (x,y)=0$

نحسب $f\ (x_1,y_1)$ ونميز الحالات الثلاثة :

1. $f\ (x_1,y_1)>0$ النقطة $M\ (x_1,y_1)$ تقع خارج القطع الناقص
2. $f\ (x_1,y_1)<0$ النقطة $M\ (x_1,y_1)$ تقع داخل القطع الناقص
3. $f\ (x_1,y_1)=0$ النقطة $M\ (x_1,y_1)$ تقع على القطع الناقص

ملاحظة تصلح النتيجة السابقة لكل قطع ناقص أياً كان مركزه وأياً كان منحى محوره

وأن مركز القطع يقع داخل القطع

ادرس الوضع النسبي للنقاط $M\ (8,2)$ ، $H\ (2,2)$ ، $N\ (-2,3)$

بالنسبة للقطع الناقص $\frac{(x-4)^2}{18}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$

الحل : نكتب $f(x,y)=\frac{(x-4)^2}{18}+\frac{(y-1)^2}{9}-1$

$$f(8,2)=\frac{(8-4)^2}{18}+\frac{(2-1)^2}{9}-1$$
$$=\frac{16}{18}+\frac{1}{9}-1=\frac{16+2-18}{18}=0$$

النقطة $M\ (8,2)$ تقع على القطع الناقص

$$f(2,2)=\frac{(2-4)^2}{18}+\frac{(2-1)^2}{9}-1$$
$$=\frac{4}{18}+\frac{1}{9}-1=\frac{4+2-18}{18}=-\frac{2}{3}<0$$

النقطة $H\ (2,2)$ تقع داخل القطع الناقص

$$f(-2,3)=\frac{(-2-4)^2}{18}+\frac{(3-1)^2}{9}-1$$
$$=\frac{36}{18}+\frac{4}{9}-1=\frac{36+8-18}{18}=\frac{13}{9}>0$$

النقطة $N\ (-2,3)$ تقع خارج القطع الناقص

مسائل

مسألة ① قطع ناقص دليلاه $\Delta': x+2=0$, $\Delta: x-10=0$ وأحد محرقيه $(1,1)$

❶ أوجد معادلة القطع ورأسيه وقطبيه ومحرقه الآخر وارسمه وارسم دليليه

❷ تحقق أن النّقطة $O(0,0)$ من نقاط القطع وأوجد معادلة d_1 المماس للقطع في هذه النّقطة

❸ أوجد معادلة d_2 مماس آخر للقطع يوازي المماس d_1 مع تعيين نقطة تماس d_2

❹ أوجد معادلتي ℓ_1 , ℓ_2 مماسين للقطع عموديان على المستقيم $\ell: x+2y+1=0$ وتعيين نقط التّماس

❺ أوجد معادلة d_3 الناظم في $O(0,0)$ وبرهن أن الناظم d_3 منصف داخلي للزاوية $\widehat{FOF'}$

❻ تحقق أن النقطة $M(1,-2)$ تقع خارج القطع وأوجد معادلتي المماسين للقطع والمارّين من هذه النّقطة

الحل :

❶ الدّليلان عموديان على المحور $x'x$ المحور المحرقي يوازي $x'x$

و $x_0=\dfrac{x_\Delta+x_{\Delta'}}{2}=4$ و المحرق المفروض يقع إلى يسار مركز القطع فهو المحرق F'

ومنه $y_0=1$, $x_0-c=1$ نعوض $x_0=4$ نجد $c=3$

من معادلة الدّليل $\Delta: x=x_0+\dfrac{a}{e}$ نجد $10=4+\dfrac{a}{e}$ أو $a=6e$ لكن $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{a}$ نستنتج أن $a^2=18$

ولدينا $b^2=a^2-c^2=9$

معادلة القطع $\dfrac{(x-4)^2}{18}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$

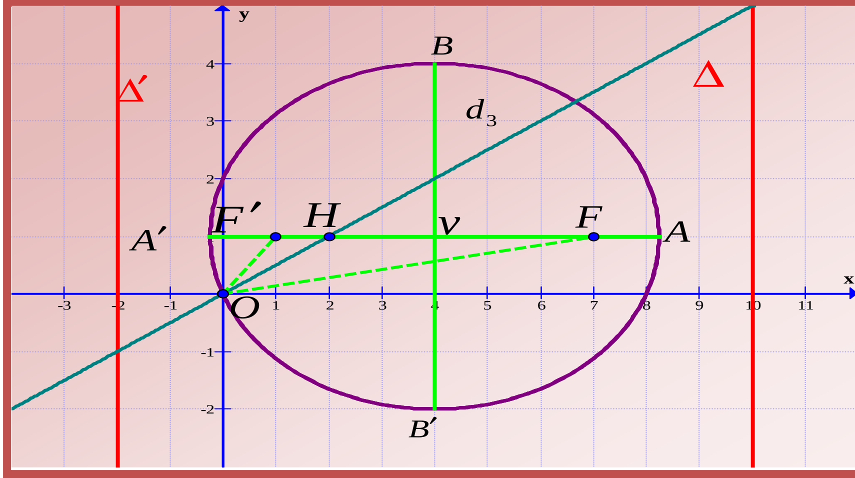
رأسيه: $A(x_o+a,y_o)$, $A'(x_o-a,y_o)$

ومنه: $A\left(4+3\sqrt{2},1\right)$ ، $A'\left(4-3\sqrt{2},1\right)$

قطبيه: $B'(x_o,y_o-b)$ ، $B(x_o,y_o+b)$ ومنه $B'(4,-2)$ ، $B(4,4)$

محرقه الآخر $F(x_o+c,y_o)$ أي $F(7,1)$

الرسم :



❷ إذا عوضنا $O(0,0)$ في معادلة القطع نجد $\frac{16}{18}+\frac{1}{9}=1$ محقق

نشتق معادلة القطع بالنّسبة إلى x نجد $\frac{2(x-4)}{18}+\frac{2(y-1)y'_x}{9}=0$

نعوض النّقطة $O(0,0)$ نجد $\frac{2(0-4)}{18}+\frac{2(0-1)m}{9}=0$ ومنه $m=-2$

معادلة المماس $d_1: y=-2x$

❸بما أن القطع النّاقص متناظر بالنّسبة إلى مركزه $V(4,1)$ ومنه صورة المماس d_1 في O وفق تناظرٍ مركزه V هو مماس d_2 للقطع في N صورة O وفق هذا التّناظر،

وبما أن التّناظر تقايس فإن d_2 يوازي d_1 .

إحداثيات N هي:

$$\left.\begin{aligned} x_N &= 2x_V - x_O = 8 \\ y_N &= 2y_V - y_O = 2 \end{aligned}\right\} ,\ N(8,2)$$

معادلة d_2 هي $y-2=-2(x-8)$ أو $d_2: y=-2x+18$

❹ ℓ_1 , ℓ_2 مماسيّن للقطع عموديّان على المستقيم $\ell: x+2y+1=0$ الذي ميله $m=-\frac{1}{2}$

يكون ميل كل من ℓ_1 , ℓ_2 هو $-\frac{1}{m}=2$ نبدل في مشتق معادلة القطع $y'_x=2$ نجد

$\frac{2(x-4)}{18}+\frac{2(y-1)(2)}{9}=0$ نجد $x-4=-4(y-1)$......①

بالحل المشترك للمعادلة ① مع معادلة القطع $\frac{(x-4)^2}{18}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$...②

نبدل ① في ② نجد $\frac{16(y-1)^2}{18}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ ومنه $(y-1)^2=1$ ولها حلّين

$y=0$ بالتعويض في ① نجد $x=8$ نقطة التّماس الأولى $M_1(8,0)$

أو $y=2$ بالتعويض في ① نجد $x=0$ نقطة التّماس الثّانية $M_2(0,2)$

المماس في $M_1(8,0)$ هو $\ell_1: y=2(x-8)$

المماس في $M_2(0,2)$ هو $\ell_2: y=2x+2$

❺ النّاظم في $O(0,0)$ عمود على d_1 معادلته $d_3: y=\frac{1}{2}x$

بالحل المشتّرك للناظم مع المحور المحرقي $y=1$ نجد نقطة تقاطعهما $H(2,1)$

وبما أن $\frac{OF'}{OF}=\frac{r'}{r}=\frac{1}{5}$ و $\frac{HF'}{HF}=\frac{|x_{F'}-x_H|}{|x_F-x_H|}=\frac{1}{5}$

يكون $\frac{OF'}{OF}=\frac{HF'}{HF}$ وحسب نظرية العكس للمنصف الدّاخلي لزاوية مثلث فإن النّاظم $d_3: y=\frac{1}{2}x$

هو المنصّف الدّاخلي للزاوية $\widehat{FOF'}$

❻ نحسب قوة النقطة بالنسبة للقطع $f(x,y)=\frac{(x-4)^2}{18}+\frac{(y-1)^2}{9}-1$

$f(1,-2)=\frac{(1-4)^2}{18}+\frac{(-2-1)^2}{9}-1=\frac{1}{2}>0$ فالنقطة $M(1,-2)$ تقع خارج القطع الناقص

المماس المار من النّقطة $M(1,-2)$ معادلته من الشّكل $y-y_M=m(x-x_M)$

أي $y+2=m(x-1)$ ومنه $y=mx-m-2$

بالحل المشّترك مع معادلة القطع $\frac{(x-4)^2}{18}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ نجد $\frac{(x-4)^2}{18}+\frac{(mx-m-3)^2}{9}=1$

بالإصلاح $(x-4)^2+2(mx-m-3)^2=18$ أو

$$x^2-8x+16+2m^2x^2-4m^2x+2m^2-12mx+12m=0$$
$$(1+2m^2)x^2-4(m^2+3m+2)x+2(m^2+6m+8)=0$$

شرط التّماس $\Delta=0$

$$16(m^2+3m+2)^2-8(1+2m^2)(m^2+6m+8)=0$$
$$2(m^2+3m+2)^2-(1+2m^2)(m^2+6m+8)=0$$
$$2m^4+18m^2+8+12m^3+8m^2+24m-m^2-2m^4-6m-16m^2-8-12m^3=0$$
$$9m^2+18m=0$$
$$9m(m+2)=0$$

إما $m=0$ ومعادلة المماس الأول $y=-2$

إما $m=-2$ ومعادلة المماس الثّاني $y=-2x$

مسألة ② قطع ناقص محرقاه $F'(2,-5)$, $F(2,3)$ ويمر من النقطة $M\left(\frac{1}{5},3\right)$

❶أوجد معادلة القطع ورأسيه وقطبيه ودليليه وارسمه

❷أوجد معادلة d المماس في النقطة $M\left(\frac{1}{5},3\right)$

❸ أوجد ℓ_1 , ℓ_2 المماسين للقطع في رأسيه B , B' وارسمهما وأوجد N_1 , N_2 نقطتي تقاطع المماس d

مع ℓ_1 , ℓ_2 واحسب المساحة بين القطع النّاقص ومماساته ℓ_1 , ℓ_2 , d

❹برهن أن القطعة $[N_1N_2]$ ترى من المحرق F' ضمن زاوية قائمة

الحل :

❶ المحرقين $F'(2,-5)$, $F(2,3)$ لهما نفس الفاصلة المحور المحرقي يوازي $y\acute{y}$

ومنه
$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 + c = 3 \ldots.. ① \\ y_0 - c = -5 \ldots. ② \end{cases}$$

بجمع ① و ② نجد $2y_0 = -2$ أي $y_0 = -1$ ، $V(2,-1)$

بالتعويض في ① نجد $c = 4$

معادلة القطع $\frac{(y+1)^2}{a^2} + \frac{(x-2)^2}{b^2} = 1$

$M\left(\frac{1}{5},3\right) \in \mathcal{E}$ تحقق معادلته $\frac{81}{25b^2} + \frac{16}{a^2} = 1 \ldots.. ③$

ولدينا $a^2 - b^2 = c^2 = 16$ ومنه $a^2 = b^2 + 16 \ldots.. ④$ نعوض ④ في ③ نجد

بالإصلاح $\frac{81}{25b^2} + \frac{16}{b^2+16} = 1$ أو $81b^2 + 1296 + 400b^2 = 25b^4 + 400b^2$

ومنه $25b^4-81b^2-1296=0$ $\quad (b^2-9)(25b^2+164)=0$

لها حل وحيد $b^2=9$ نعوض في ④ نجد $a^2=25$

معادلة القطع $\quad \frac{(y+1)^2}{25}+\frac{(x-2)^2}{9}=1$

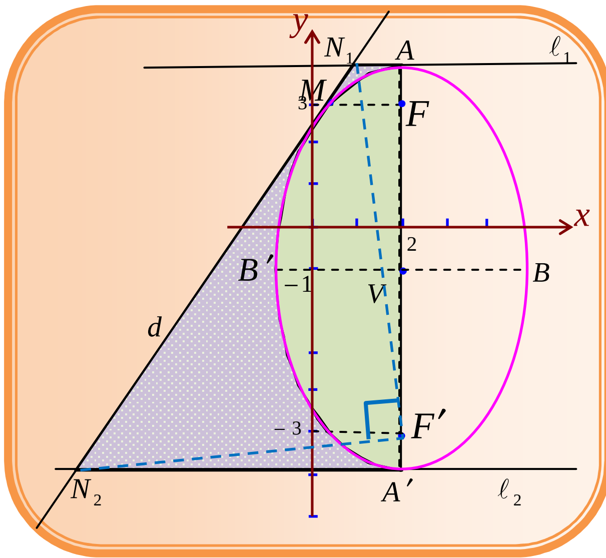
الرّأسين $A(x_o,y_o+a)$ ومنه: $A(2,4)$ $\quad A'(x_o,y_o-a)$ ومنه: $A'(2,-6)$

القطبين $B(x_o+b,y_o)$ ومنه: $B(5,-1)$

$B'(x_o-b,y_o)$ ومنه: $B'(-1,-1)$

الدّليلين $\Delta':y=y_0-\frac{a}{e}$, $\Delta:y=y_0+\frac{a}{e}$

$\Delta':y=-\frac{29}{4}$, $\Delta:y=\frac{21}{4}$



❷ نشتق معادلة القطع

$$\frac{2(x-2)}{9}+\frac{2(y+1)y'_x}{25}=0$$

نعوض $M\left(\frac{1}{5},3\right)$

نجد $\frac{2\left(\frac{1}{5}-2\right)}{9}+\frac{2(3+1)m}{25}=0$

بالإصلاح $m=\frac{5}{4}$

معادلة المماس $y-3=\frac{5}{4}(x-\frac{1}{5})$

ومنه $d:y=\frac{5}{4}x+\frac{11}{4}$

❸ المماس في $A(2,4)$ هو $\ell_1:y=4$ والمماس في $A'(2,-6)$ هو $\ell_2:y=-6$

بالحل المشترك ℓ_1 مع d نجد نقطة التّماس $N_1(1,4)$

بالحل المشترك ℓ_2 مع d نجد نقطة التّماس $N_2(-7,-6)$

ولحساب المساحة المطلوبة تساوي مساحة الرّباعي $N_1AA'N_2$ مطروحاً منها نصف مساحة القطع:

$$S=\frac{N_1A+A'N_2}{2}\cdot AA'-\frac{\pi}{2}a\cdot b$$

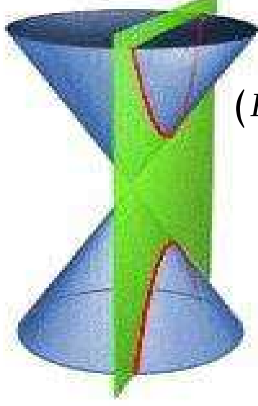
لكن $N_1A=|x_A-x_{N_1}|=1$ و $N_2A'=|x_{A'}-x_{N_2}|=9$ و $AA'=2a=10$

$S=\frac{1+9}{2}\cdot(10)-\frac{\pi}{2}(3)\cdot(5)$ ومنه $S=\frac{100-15\pi}{2}$ وحدة مساحة

❹ $N_1(1,4)$ ، $N_2(-7,-6)$ ، $F'(2,-5)$

$\overrightarrow{F'N_1}(1,-9)$ ، $\overrightarrow{F'N_2}(-9,-1)$

$\overrightarrow{F'N_1}\cdot\overrightarrow{F'N_2}=-9+9=0$



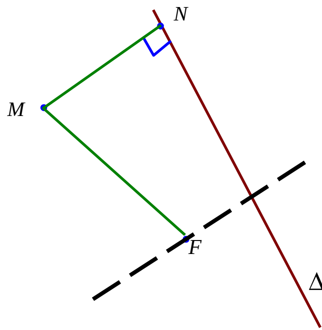
1 تعريف: لتكن F نقطة ثابتة و Δ مستقيم ثابت في نفس المستوي (κ) و $(F \notin \Delta)$

القطع الزائد مجموعة نقط المستوي (κ) التي نسبة بعد كل منها عن F

إلى بعدها عن Δ يساوي e $(e > 1)$.

التعريف بالرموز : بفرض N مسقط M على Δ ومجموعة نقاط القطع $\mathcal{H}$

$$M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \frac{MF}{MN} = e \text{........✪}$$



اصطلاحات: نُسمِّي النّقطة الثّابتة F مِحرق(بؤرة) القطع .

Δ الدّليل المتعلّق بالمحرق F .

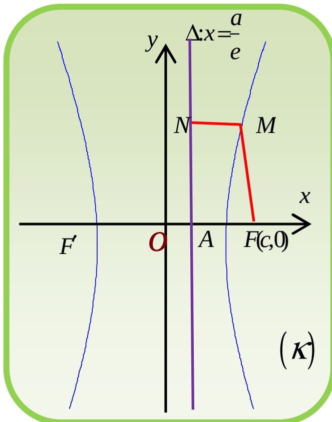
e الاختلاف المركزي(التّباعد المركزي).

2 المعادلة المختزلة لقطع زائد:

وجدنا في الفصل الخامس أن للقطع الزّائد مركز تناظر وأنّه إذا كان بعد الرأس عن المركز $OA = a$

فإن بعد مركز القطع عن الدّليل هو $OH = \frac{a}{e}$ وبعد المحرق عن المركز $OF = c$

والاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a}$



عندمانُحدث المستوي (κ) بمعلمٍ متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ومركز القطع

مبدأ للجملة والمحور المحرقي هو المحور $x'Ox$ ومحرق القطع $F(c, 0)$

فتكون معادلة الدليل المتعلق بالمحرق F هي $\Delta : x = \frac{a}{e}$

والتّباعد المركزي (الاختلاف المركزي) $e \in]1, +\infty[$

وحسب تعريف القطع فإن $\frac{MF}{MN}=e$ بالتعويض $\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\left|x-\frac{a}{e}\right|}=e$ ومنه

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=|ex-a|$ بالتربيع $x^2-2c\cdot x+c^2+y^2=e^2x^2-2e\cdot a\cdot x+a^2$ لكن $c=a\cdot e$

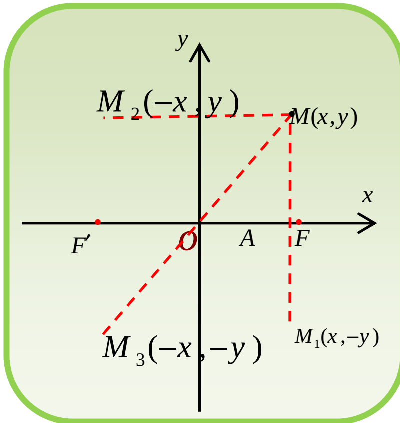
$x^2-2a\cdot e\cdot x+a^2e^2+y^2=e^2x^2-2e\cdot a\cdot x+a^2$ بعملية إصلاح $(1-e^2)x^2+y^2=a^2(1-e^2)$

نقسم الطرفين على $a^2(1-e^2)$ نجد $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$

بما $e\in]1,+\infty[$ فإنّ $1-e^2<0$ نفرض $a^2(1-e^2)=-b^2$ بالتعويض نجد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

نسميها المعادلة المختزلة للقطع الزّائد الّذي محوره المحرقي $x'Ox$

❸ دراسة تحليلية لمعادلة القطع الزّائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$



① النقطة $M_1(x,-y)$ نظيرة $M(x,y)$ بالنسبة للمحور $x\acute{x}$

تحقق المعادلة $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

أي أن $x\acute{x}$ محور تناظر للقطع وهو المحور المحرقي

② النقطة $M_2(-x,y)$ نظيرة $M(x,y)$ بالنسبة للمحور $y\acute{y}$

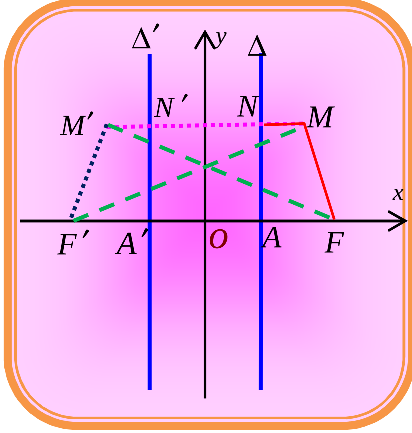
تحقق المعادلة $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

أي أن $y\acute{y}$ محور تناظر للقطع وهو المحور اللامحرقي(أو المحور المرافق)

③ النقطة $M_3(-x,-y)$ نظيرة $M(x,y)$ بالنسبة للمبدأ $O(0,0)$ تحقق المعادلة $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

أي أن $O(0,0)$ مركز تناظر للقطع

④ من الخصائص التناظرية السابقة القطع النّاقص متناظر بالنّسبة للمحور $y\acute{y}$ نستنتج أن للقطع دليل آخر $\Delta':x=-\frac{a}{e}$ يتعلق بالمحرق F' ويحققان تعريف القطع



البرهان:إذا كانت M' نظيرة M بالنسبة إلى $y\acute{y}$

فهي نقطة من القطع و $M'\in\mathcal{H}\Leftrightarrow\frac{M'F}{M'N}=e$

لكن $M'F=MF'$ و $M'N=MN'$

إذاً $\frac{MF'}{MN'}=e$

والنقطة $M\in\mathcal{H}$ يكون $\Delta':x=-\frac{a}{e}$ دليل آخر للقطع يتعلق بالمحرق F'

نتيجة : وجدنا أن $\frac{MF'}{MN'}=\frac{MF}{MN}=e$ ومنه $\frac{|MF-MF'|}{|MN-MN'|}=e$ أي $\frac{|MF-MF'|}{NN'}=e$

لكن البعد بين الدليلين $NN'=\frac{2a}{e}$ نستنتج $|MF-MF'|=2a$

ومنه التعريف الآتي :

لتكن F',F نقطتين ثابتتين من نقاط المستوي (κ) القطع الزّائد (κ) هو مجموعة نقط المستوي

التي فرق بعدي كل منها عن هاتين النّقطتين يساوي طولاً ثابتاً $2a$ (طول القطر المحرقي).

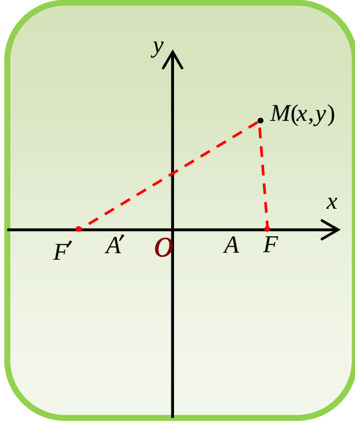
بالرموز : $M\in\mathcal{H}\Leftrightarrow|MF-MF'|=2a$

يمكن الوصول للمعادلة المختزلة عن طريق التعريف الثاني وهو:

$$M\in\mathcal{H}\Leftrightarrow|MF-MF'|=2a$$

نفرض أن مركز القطع مبدأ لجملة قانونية والمحور المحرقي هو المحور $x'ox$

فإن محرقه $F(c,0)$ والمحرق $F'(-c,0)$ وحسب التعريف $|MF-MF'|=2a$



$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$$

تكتب $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ بالتربيع

$$(x-c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$\mp 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+(x+c)^2-(x-c)^2$$

$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$ بالتربيع مرة أخرى

$a^2x^2+2cxa^2+c^2a^2+y^2a^2=a^4+2cxa^2+c^2x^2$ ، $c^2x^2-x^2a^2-y^2a^2=a^2c^2-a^4$

ومنه $\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=\left(c^2-a^2\right)a^2$

بما أن $c>a$ نفرض $c^2-a^2=b^2$ نجد المعادلة $b^2x^2-a^2y^2=b^2a^2$ بالتقسيم على b^2a^2 نجد

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ نسميها المعادلة المختزلة للقطع الزائد الذي محوره المحرقي $x'Ox$

⑥ من أجل $y=0$ نجد $\dfrac{x^2}{a^2}=1$ ولها حلين $x=\pm a$

للقطع $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ نقطتين على المحور المحرقي هما $A(a,0)$, $A'(-a,0)$

وهما رأسي القطع وطول القطر المحرقي هو المسافة بينهما وهي $A'A=2a$

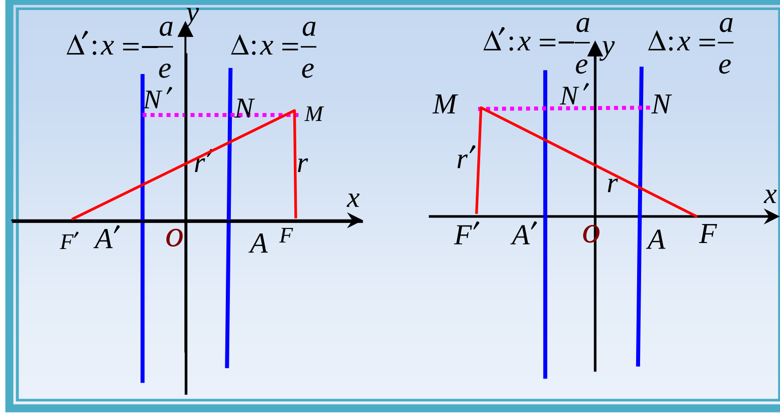
⑦من أجل $x=0$ نجد $\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ مستحيلة الحل

أي أن القطع لا يقطع المحور اللامحرقي(المحور المرافق) فهو منحن غير مغلق له فرعين

وبما أن كل فرع يقطع المحور المحرقي في نقطة وحيده هي رأس للقطع فكل فرع من الفرعين غير مغلق

⑨حساب نصفي القطرين المِحرقيين $r\ ,\ r'$ لنقطة من قطع زائد

إذا كانت $M\,(x,y)$ نقطة من القطع الزّائد: نعلم أن $\frac{MF'}{MN'}=\frac{MF}{MN}=e$



ومنه $MF'=e\cdot MN'$

و $MF=e\cdot MN$

أي : $r'=e\cdot MN'$ و $r=e\cdot MN$

ومنه $r'=e\left|x-x_{\Delta'}\right|$

و $r=e\left|x-x_{\Delta}\right|$ لكن $x_{\Delta'}=-\frac{a}{e}$ و $x_{\Delta}=\frac{a}{e}$

ومنه $r'=\left|a+e\cdot x\right|$ و $r=\left|a-e\cdot x\right|$

ملاحظة : في الفرع الأيمن (فرع المحرق F يكون $r'>r$) $r'=a+e\cdot x$ و $r=-a+e\cdot x$

في الفرع الأيمن (فرع المحرق F' يكون $r>r'$) $r'=-a-e\cdot x$ و $r=a-e\cdot x$

⑩دوال القطع الزّائد: من المعادلة $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ تكتب $\frac{x^2}{a^2}-1=\frac{y^2}{b^2}$ أو $y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(x^2-a^2\right)$

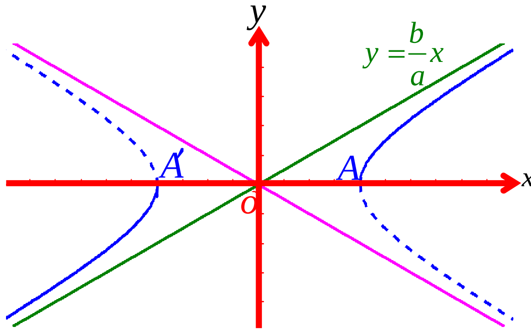
$$\begin{cases} y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=f_1(x) \\ y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=f_2(x) \end{cases}$$

إنّ مجموعة نقط القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هو اجتماع مجموعة نقاط الدالتين السابقتين وكل منهما معرف على اجتماع المجالين المنفصلين $[a,+\infty[\ ,\ ]-\infty,-a]$

الدالة $f_1(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ تقع فوق المحور الأفقي للقطع

والدالة $f_2(x)=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ تقع تحت المحور الأفقي للقطع

(11)المستقيمين المقاربين للقطع الزائِد



قطع زائِد H معادلته: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

وجدنا أن القطع الزائد اجتماع دالتين:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \\ f_2(x)=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \end{array}\right\}$$

لتكن الدالة f_1 المعرفة على $[a,+\infty[$ وفق: $f_1(x)=y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ ، وخطها البياني Ω يوافق قوس القطع الزائد الواقع في الربع الأول

لنبرهن أن المستقيم d الذي معادلته $y=\frac{b}{a}x$ مقارب للخط Ω عند $+\infty$

نشكل الفرق $f_1(x)-y_d=\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)$ بالاعتماد على التحليل الرياضي نجد:

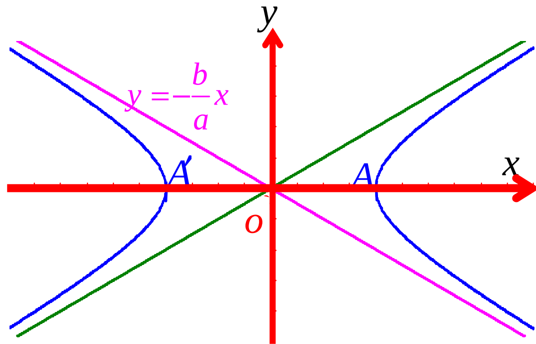
$$\begin{aligned} f_1(x)-y_d &= \frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right) \\ &= \frac{b}{a}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\right) \\ &= \frac{b}{a}\left(\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\right)=\frac{-ab}{\sqrt{x^2-a^2}+x} \end{aligned}$$

ومنه: $\lim_{x\to+\infty}\left(f_1(x)-y_d\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-ab}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\right)=0$

إذن المستقيم d مقارب للخط Ω عند $+\infty$ لاحظ أن $f(x)-y_D<0$ عندما $x\in[a,+\infty[$

إذن Ω تحت مقاربه d.

وبما أنّ القطع متناظر بالنّسبة إلى $(0,0)$ فالمستقيم الذي معادلته $y=\frac{b}{a}x$ مقارب للقوس الواقع في الرّبع الثّالث ويكون $f(x)-y_d>0$ عندما $x\in\,]-\infty,-a]$



فنقاط هذا القوس تقع فوق المقارب.

بما أن القطع متناظر بالنسبة إلى محوره المحرقي

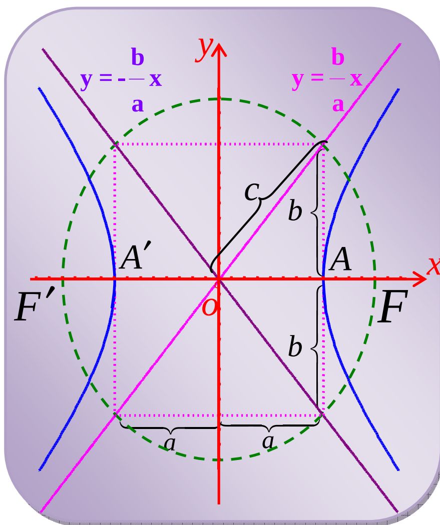
فالمستقيم d' الذي معادلته: $y=-\frac{b}{a}x$

هو نظير d بالنسبة إلى $x'x$ مقارب للقوسين من القطع الزّائد H والواقعين في الربعين الثّاني والرّابع

لاحظ: أنّ مقاربي قطع زائِد يتقاطعان في مركزه.

(12) **رسم القطع الزائد**

لرسم القطع الزّائِد H الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ نتبع الآتي:



نرسم المستطيل الذي مركزه مركز القطع وبعداه $2a\ ,\ 2b$

بحيث يكون البعد الأول $2a$ على المحور $x\acute{x}$

والبعد الثاني $2b$ على المحور $y\acute{y}$ سيكون

طول كل من قطري المستطيل $2c$.

ورأسي القطع هما نقطتي تقاطع المحور المحرقي

لضلعا المستطيل السابق نمدّد قطري المستطيل

فنحصل على المقاربين. ثم نرسم القطع ماراً من الذروتين $A\ ,\ A'$

الدائرة المارة من رؤوس المستطيل تقطع المحور المحرقي في المحرقين $F\ ,\ F'$

مثال:

ارسم القطع الزّائِد الذي معادلته: $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ ثم عين رأسيه ومحرقيه

الحل:

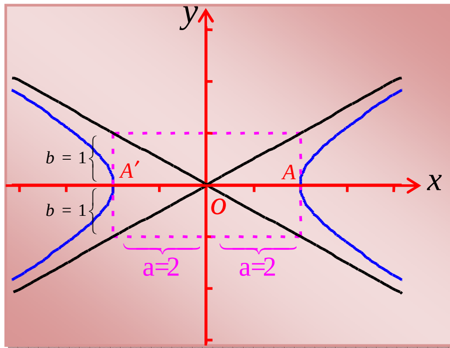
له الصّيغة $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ محوره المحرقي $x'x$ ، مركزه $o(0,0)$ مقارباه $y = \pm 2x$

نوجد (a,b,c) : $a^2 = 4$ ومنه $a = 2$

$b^2 = 1$ ومنه $b = 1$ $\quad$ $c^2 = a^2 + b^2$ ومنه $c = \sqrt{5}$

نرسم المستطيل الذي طوله $2a = 4$ وارتفاعه $2b = 2$ ومركزه مركز القطع

الرسم :



نرسم أقطار المستطيل ونمددها نجد المستقيمين المقاربين

أضلاع المستطيل تقطع المحور المحرقي في الرأسين

بالاعتماد على المقاربين والرأسين نرسم القطع

الرأسين $A'(-2,0)$, $A(2,0)$

المحرقين $F'(-\sqrt{5},0)$, $F(\sqrt{5},0)$

لاحظ : يمكن رسم كل مقارب بمعرفة نقطتين منه

يمكن تلخيص الدراسة السابق بالجدول الآتي :

الشكل	الرأسين	المعادلة	المقاربان	المحرقين	الدليلين	نصفا القطرين المحرقيين
	$A(a,0)$ $A'(-a,0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y}{b}=\pm\frac{x}{a}$	$F(c,0)$ $F'(-c,0)$	$\Delta: x=\frac{a}{e}$ $\Delta': x=-\frac{a}{e}$	$r=\lvert a-e\cdot x\rvert$ $r'=\lvert a+e\cdot x\rvert$
	$A(0,a)$ $A'(0,-a)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	$\frac{y}{a}=\pm\frac{x}{b}$	$F(0,c)$ $F'(0,-c)$	$\Delta: y=\frac{a}{e}$ $\Delta': y=-\frac{a}{e}$	$r'=\lvert a+e\cdot y\rvert$ $r=\lvert a-e\cdot y\rvert$

مثال ①:

أوجد معادلة القطع الزّائِد الذي محرقه $F(5,0)$ ومعادلتا مقاربيه $\left.\begin{array}{l}4y-3x=0\\4y+3x=0\end{array}\right\}$

الحل:

إنّ نقطة تقاطع المقاربين هي $o(0,0)$ وهي مركز القطع الزّائِد.

وبما أنّ النّقطة $F(5,0)$ تقع على محور $x'x$ فإنّ المحور المحرقي للقطع هو $x'x$

إذاً معادلة القطع لها الصّيغة : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

معادلتا مقاربيه: $y=\pm\frac{b}{a}x$

لكن: $4y-3x=0$ ميله $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$ إذن: ❶... $b=\frac{3}{4}a$

وبما أنّ: ❷... $c^2=a^2+b^2$ و من إحداثيات المحرق نجد ❸... $c=5$

نعوض ❶ و ❸ في ❷ نجد أنّ: $25=a^2+\frac{9}{16}a^2$

$25=\frac{25a^2}{16}$ ومنه $a^2=16$ أي $a=4$

فيكون: $b=\frac{3}{4}\times4=3$ إذن معادلة القطع الزّائِد هي: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

مثال②:

ليكن القطع الزّائِد $\mathcal{H}$ الّذي معادلته: $x^2-16y^2=16$

أوجد اختلافه المركزي وإحداثيّات كل من محرقي القطع F, F' ورأسيه A, A'.

وأوجد معادلة كل من مقاربيه ودليليه ثم ارسمه.

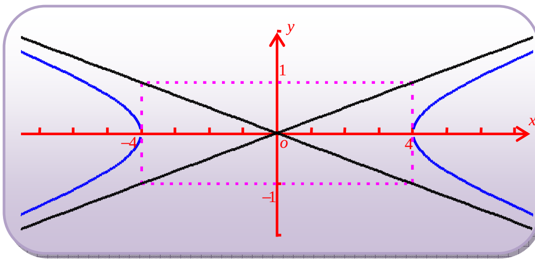
الحل:

1) معادلة القطع لها الصّيغة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ مِحوره المِحرقي $x'x$، مركِزه $o(0,0)$

$a^2=16\ ,\ a=4$

$b^2=1\ \ ,\ b=1$

$c^2=a^2+b^2\Rightarrow c^2=17\ ,\ c=\sqrt{17}$



الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}$ ومنه $e=\frac{\sqrt{17}}{4}$

2) محرقاه:
$$\left.\begin{array}{l} F(c,0)=F\left(\sqrt{17},0\right) \\ F'(-c,0)=F'\left(-\sqrt{17},0\right) \end{array}\right\}$$

رأساه:
$$\left.\begin{array}{l} A(a,0)=A(4,0) \\ A'(-a,0)=A'(-4,0) \end{array}\right\}$$

3) معادلتا مقاربيه:
$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{b}{a}x \quad , \quad y=\frac{1}{4}x \\ y=-\frac{b}{a}x \quad , \quad y=-\frac{1}{4}x \end{array}\right\}$$

معادلتا دليليه:
$$\left.\begin{array}{l} \Delta : x=\frac{a}{e} \quad , \quad \Delta : x=\frac{16}{\sqrt{17}} \\ \Delta' : x=-\frac{a}{e} \quad , \quad \Delta' : x=-\frac{16}{\sqrt{17}} \end{array}\right\}$$

مثال③:

ليكن القطع الزّائِد $\mathcal{H}$ الذي معادلته: $9y^2-4x^2=36$

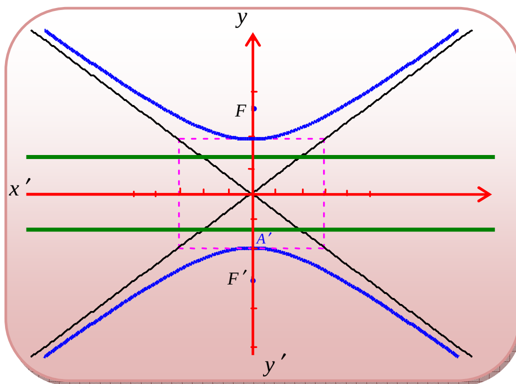
أوجد محرقي القطع: F,F' ورأسيه A,A'. وأوجد معادلتي مقاربيه ومعادلتي دليليه.

واحسب طولا نصفي القطرين المحرقيين عند نقطة منه M ترتيبها $y=4$.

الحل:

تكتب المعادلة $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$ للمعادلة الصيغة: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

قطع زائد محوره المحرقي هو $y'y$ ومركزه $o(0,0)$.



$$a^2=4 \quad , \quad a=2$$
$$b^2=9 \quad , \quad b=3$$
$$c^2=a^2+b^2$$
$$c^2=9+4=13$$
$$c=\sqrt{13}$$

محرقاه: $\left.\begin{array}{l} F(0,c)=F\left(0,\sqrt{13}\right) \\ F'(0,-c)=F'\left(0,-\sqrt{13}\right) \end{array}\right\}$

رأساه: $\left.\begin{array}{l} A(0,a)=A(0,2) \\ A'(0,-b)=A'(0,-2) \end{array}\right\}$

معادلتا مقاربيه: $\left.\begin{array}{l} y=\frac{a}{b}x \Rightarrow y=\frac{2}{3}x \\ y=-\frac{a}{b}x \Rightarrow y=-\frac{2}{3}x \end{array}\right\}$

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}$ ومنه $e=\frac{\sqrt{13}}{2}$

معادلتا دليلاه: $\left.\begin{array}{l} \Delta : y=\frac{a}{e} \Rightarrow y=\frac{4}{\sqrt{13}}=\frac{4\sqrt{13}}{13} \\ \Delta' : y=-\frac{a}{e} \Rightarrow y=-\frac{4}{\sqrt{13}}=-\frac{4\sqrt{13}}{13} \end{array}\right\}$

نصفا القطرين المحرقيين عند النقطة M:

$$r=|a-ey|=\left|2-\frac{\sqrt{13}}{2}\times 4\right|=2\sqrt{13}-2$$

$$r'=|a+ey|=\left|2+\frac{\sqrt{13}}{2}\times 4\right|=2\sqrt{13}+2$$

تمارين القطع الزائد:

تمرين 1 :

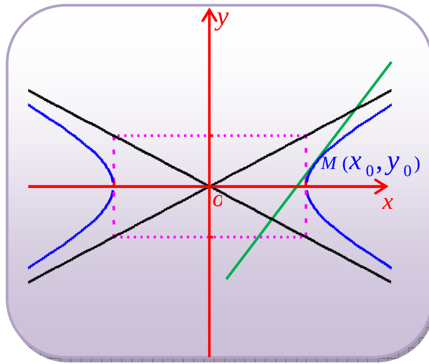
برهن أن معادلة مماس القطع الزّائد $\mathcal{H}:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ في نقطة $M(x_0,y_0)\in\mathcal{H}$ تعطى بالصّيغة :

$$\frac{x_0\cdot x}{a^2}-\frac{y_0\cdot y}{b^2}=1$$

: نشتق معادلة القطع $\mathcal{H}:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ بالنسبة إلى x نجد $\frac{2x}{a^2}-\frac{2yy'_x}{b^2}=0$

عند $M(x_0,y_0)$ يكون $\frac{x_0}{a^2}-\frac{y_0\cdot m}{b^2}=0$

ومنه ميل المماس $y_0\neq 0$: $m=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$



فتكون معادلة المماس $y-y_0=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$

بالإصلاح $a^2y_0y-a^2y_0^2=b^2x_0x-b^2x_0^2$ ،

أو $b^2x_0x-a^2y_0y=b^2x_0^2-a^2y_0^2$

نقسم الطرفين على $b^2\cdot a^2$ نجد المعادلة

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}$$

وبما أن $M(x_0,y_0)\in\mathcal{H}$ تحقق معادلته أي $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$ إذن معادلة المماس

$$\frac{x_0\cdot x}{a^2}-\frac{y_0\cdot y}{b^2}=1 ...... ✪$$

من أجل $y_0=0$ نجد نقطتين للتماس $(\pm a,0)$ رأسي القطع

والمماس عند $A(a,0)$ هو $x=a$ وعندما نبدل $A(a,0)$ في المعادلة ✪ نجد المعادلة $x=a$

والمماس عند $A'(-a,0)$ هو $x=-a$ وعندما نبدل $A'(-a,0)$ في المعادلة ✪ نجد المعادلة

$x=-a$

النتيجة أياً كانت $M(x_0,y_0)\in\mathcal{H}$ فإن معادلة المماس عندها هي المعادلة ✪

ملاحظة : معادلة مماس القطع الزائد $\mathcal{H}:\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ في نقطة $M(x_0,y_0)\in\mathcal{H}$

تعطى بالصيغة $\frac{y_0\cdot y}{b^2}-\frac{x_0\cdot x}{a^2}=1$

تمرين 2 : برهن أن مجموعة النّقاط الّتي يرى منها القطع الزّائد $\mathcal{H}:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

ضمن زاوية قائمة هي الدائرة: $x^2+y^2=a^2-b^2 \;:\; a\geq b$

البرهان : المماس من الشكل $y=mx+h \;\; :m\neq 0$

بالحل المشترك مع القطع $\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+h)^2}{b^2}=1$

ومنه $b^2x^2-a^2(mx+h)^2=a^2b^2$ ، $(b^2-a^2m^2)x^2-2a^2mhx-a^2(h^2+b^2)=0$

شرط التماس وجود جذر مضاعف $\Delta=0$

$$(2a^2mh)^2+4a^2(b^2-a^2m^2)(h^2+b^2)=0$$

$$4a^4m^2h^2+4a^2b^2h^2+4a^2b^4-4a^4m^2h^2-4a^4m^2b^2=0$$

$$h^2+b^2-a^2m^2=0$$

$h=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ بشرط $a^2m^2-b^2\geq 0$ أي $m^2\geq\frac{b^2}{a^2}$

ومنه I.... $m\in\left]-\infty,-\frac{b}{a}\right]\cup\left[\frac{b}{a},+\infty\right[$

المماس الأول $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$.........❶

المماس العمودي على المماس الأول ميله $-\frac{1}{m}$

$m \neq 0$, ❷...... $y=-\frac{1}{m}x \pm \sqrt{a^2\frac{1}{m^2}-b^2}$ بشرط $a^2\frac{1}{m^2}-b^2 \geq 0$ أي $m^2 \leq \frac{a^2}{b^2}$

ومنه $m \in \left[-\frac{a}{b},\frac{a}{b}\right]$.... II

من I و II نجد الشرط $m \in \left[-\frac{a}{b},-\frac{b}{a}\right] \cup \left[\frac{b}{a},\frac{a}{b}\right]$ أو $a \geq b$

من ❶ $y-mx=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ بالتربيع $y^2-2mxy+m^2x^2=a^2m^2-b^2$......❸

من ❷ $my=-x\pm\sqrt{a^2-m^2b^2}$

أو $my+x=\pm\sqrt{a^2-m^2b^2}$ بالتربيع $m^2y^2+2mxy+x^2=a^2-b^2m^2$......❹

بجمع ❸ و ❹ $x^2+y^2+m^2y^2+m^2x^2=a^2-b^2+m^2a^2-m^2b^2$

وتكتب $\left(x^2+y^2\right)(1+m^2)=\left(a^2-b^2\right)(1+m^2)$ بالتقسيم على $1+m^2 \neq 0$

وبالتالي $x^2+y^2=a^2-b^2$

النتيجة : مجموعة النقاط التي يرى منها القطع الزائد $\mathcal{H}:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ضمن زاوية قائمة هي الدائرة

$x^2+y^2=a^2-b^2 \ : \ a \geq b$

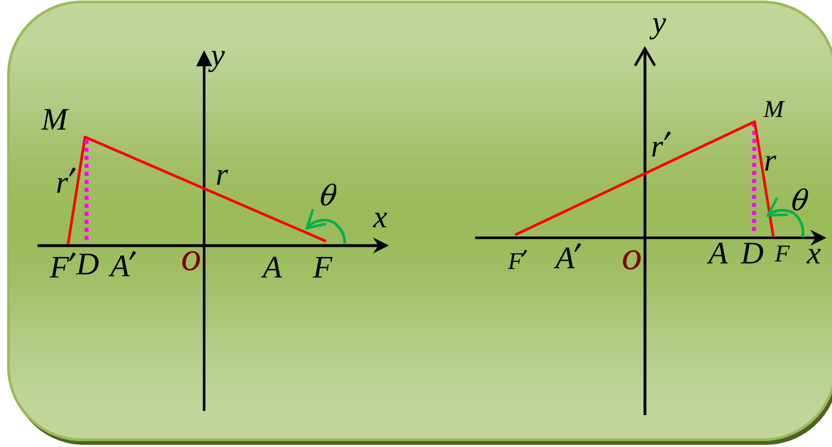
ملاحظة : مجموعة النقاط التي يرى منها القطع الزائد $\mathcal{H}:\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ ضمن زاوية قائمة هي الدائرة

$$x^2+y^2=a^2-b^2 \ , \ a \geq b$$

تمرين 3 :

ليكن القطع الزّائد $\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ برهن أن نصف القطر المحرقي $r=FM$ الذي يصنع زاوية θ مع المحور $x'x$ أي $\theta=\left(\widehat{\overrightarrow{ox},\overrightarrow{FM}}\right)$ يعطى بالقانون :

في الفرع الأيمن $r=\frac{b^2}{a-c\cdot\cos\theta}$ وفي الفرع اليسر $r=\frac{-b^2}{a+c\cdot\cos\theta}$



$$r=|a-e\cdot x|$$

$$r=|a-e\cdot \overline{OD}|=|a-e\cdot(\overline{OF}+\overline{FD})|$$
$$r=|a-e\cdot(c+r\cos\theta)|$$

أولاً: إذا كانت M من الفرع الأيمن :

$$r=-a+e\cdot(c+r\cos\theta)$$
$$r-e\cdot r\cos\theta=-a+e\cdot c$$
$$r(1-\frac{c}{a}\cdot\cos\theta)=-a+\frac{c}{a}c=\frac{b^2}{a}\quad :b^2=c^2-a^2$$
$$r=\frac{b^2}{a-c\cdot\cos\theta}$$

ثانياً: إذا كانت M من الفرع الأيسر :

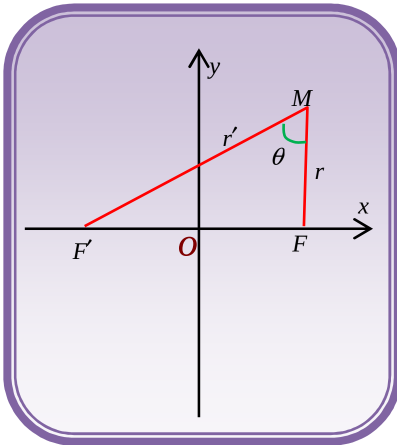
$$r = a - e\cdot(c + r\cos\theta)$$
$$r + e\cdot r\cos\theta = a - e\cdot c$$
$$r\left(1+\frac{c}{a}\cdot\cos\theta\right) = a - \frac{c}{a}c = \frac{-b^2}{a} \quad : b^2 = c^2 - a^2$$
$$r = \frac{-b^2}{a + c\cdot\cos\theta}$$

تمرين 4 : ليكن القطع الزّائد	$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	ولتكن	$\theta = \widehat{FMF'}$	برهن أن	$b^2 = r\cdot r'\sin^2\frac{\theta}{2}$

الحل:

حسب قاعدة التجيب في المثلث FMF'

$$\overline{FF'}^2 = \overline{FM}^2 + \overline{MF'}^2 - 2MF\cdot MF'\cos\theta$$



أي

$$4c^2 = r^2 + r'^2 - 2r\cdot r'\cos\theta$$

لكن $|r - r'| = 2a$

ومنه $(r - r')^2 = 4a^2$

أي $r^2 + r'^2 = 4a^2 + 2r\cdot r'$ بالتعويض

$$4c^2 = 4a^2 + 2r\cdot r' - 2r\cdot r'\cos\theta$$

أي $4c^2 - 4a^2 = 2r\cdot r'(1 - \cos\theta)$

$4b^2 = 4r\cdot r'\sin^2\frac{\theta}{2}$ أو $b^2 = r\cdot r'\sin^2\frac{\theta}{2}$

تمارين في المحلات الهندسية لمنتصفات الأوتار لقطع زائد

① برهن أن المحل الهندسي لمنتصفات الأوتار المحرقية للقطع الزائد

$\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

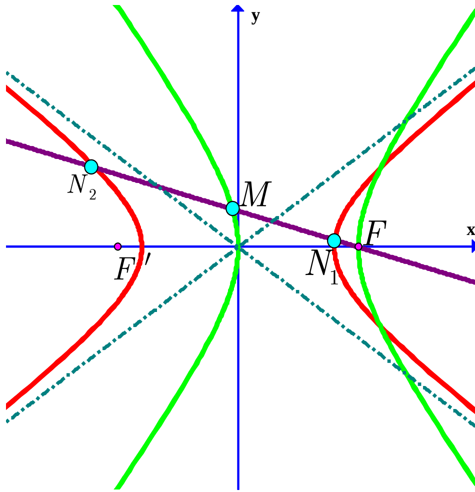
هي القطع الناقص $\frac{(x-\frac{c}{2})^2}{\frac{c^2}{4}} - \frac{y^2}{\frac{b^2c^2}{4a^2}} = 1$

محرق القطع $F(c,0)$ وحزمة المستقيمات المارة منه

$$\begin{cases} y = m(x-c) \ldots ① \\ \text{ـــــع} \\ x = c \ldots\ldots\ldots\ldots ② \end{cases}$$

بالحل المشترك للمعادلة ① مع معادلة القطع

نجد بتعويض ① في معادلة القطع $\frac{x^2}{a^2} - \frac{m^2(x-c)^2}{b^2} = 1$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{m^2(x-c)^2}{b^2} = 1$$
$$b^2x^2 - m^2a^2x^2 + 2m^2a^2cx - m^2c^2a^2 = a^2b^2$$
$$\left(b^2 - m^2a^2\right)x^2 + 2m^2a^2cx - m^2c^2a^2 - a^2b^2 = 0$$

يوجد وتر $[N_1N_2]$ إذا كان مميز المعادلة $\Delta \geq 0$ أي

$$\Delta = 4m^4a^4c^2 + 4\left(b^2 - m^2a^2\right)\left(m^2c^2a^2 + a^2b^2\right)$$
$$\Delta = b^2m^2c^2a^2 + b^4a^2 - m^2a^4b^2$$
$$\Delta = b^2a^2\left(b^2 + \left(c^2 - a^2\right)m^2\right) = b^2a^2\left(b^2 + b^2m^2\right)$$

يكون $\Delta \geq 0$ عندما $b^2 + b^2m^2 \geq 0$ محققة أياً كانت $m \in \mathbb{R}$

وجذرا المعادلة هما طرفا الوتر المحرقي

وفاصلة M منتصف الوتر المحرقي $[N_1N_2]$ هي $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} = -\frac{m^2a^2c}{b^2 - m^2a^2}$

نعوض في ① نجد $y=m(-\frac{m^2a^2c}{b^2-m^2a^2}-c)$ أو $y=-\frac{b^2cm}{b^2-m^2a^2}$

المعادلات الوسيطية للنقطة M منتصف الوتر المحرقي $[N_1N_2]$ هي

$$m\in\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{b}{a}\right\} \quad : \quad \begin{cases} x=-\frac{m^2a^2c}{b^2-m^2a^2} \\ y=-\frac{mb^2c}{b^2-m^2a^2} \end{cases}$$

مع $x\neq c$ (لأنه عندما $x=c$ سنجد $b=0$)

$m=\frac{xb^2}{ya^2}$ نبدل $y=m(x-c)$ نجد $y=\frac{xb^2}{ya^2}(x-c)$

$$b^2(x^2-cx)-a^2y^2=0$$

$$b^2(x-\frac{c}{2})^2-b^2\frac{c^2}{4}-a^2y^2=0$$

ومنه $a^2x^2+b^2y^2-a^2cx=0$ ومنه

$$b^2(x-\frac{c}{2})^2-a^2y^2=b^2\frac{c^2}{4}$$

$$\frac{(x-\frac{c}{2})^2}{\frac{c^2}{4}}-\frac{y^2}{\frac{b^2c^2}{4a^2}}=1$$

حامل المحل الهندسي هو القطع الناقص $\frac{(x-\frac{c}{2})^2}{\frac{c^2}{4}}-\frac{y^2}{\frac{b^2c^2}{4a^2}}=1$ عدا النقطة $(c,0)$

ومن أجل المستقيم ②, $x=c$ فهو يحدد وتراً منتصفه $(c,0)$

المحل الهندسي المطلوب هو كامل القطع الزائد $\frac{(x-\frac{c}{2})^2}{\frac{c^2}{4}}-\frac{y^2}{\frac{b^2c^2}{4a^2}}=1$

②برهن أن المحل الهندسي لمنتصفات الأوتار الموازية للمستقيم للقطع الناقض

$\mathcal{H}:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

هي قطعة مستقيمة $\Delta: y=mx$

حزمة المستقيمات الموازية $\Delta: y=mx$ هي $y=mx+h$.....①

بالحل المشترك للمعادلة ①مع معادلة القطع

نجد بتعويض ① في معادلة القطع $\mathcal{H}:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+h)^2}{b^2}=1$$
$$b^2x^2-m^2a^2x^2+2ma^2hx-h^2a^2=a^2b^2$$
$$\left(b^2-m^2a^2\right)x^2+2ma^2hx-h^2a^2-a^2b^2=0$$

يوجد وتر $[N_1N_2]$إذا كان مميز المعادلة $\Delta\geq 0$ أي

$$\Delta=4m^2a^4h^2+4\left(b^2-m^2a^2\right)\left(h^2a^2+a^2b^2\right)$$
$$=4m^2a^4h^2+4b^2h^2a^2-4m^2a^4h^2+4b^4a^2-4m^2a^4b^2$$
$$\Delta=4b^2h^2a^2+4b^4a^2-4m^2a^4b^2=4a^2b^2\left(h^2+b^2-m^2a^2\right)$$

$h^2+b^2-m^2a^2\geq 0$ ومنه $h^2\geq m^2a^2-b^2$

إذا كان ✪.....$m^2a^2-b^2\leq 0$ أي $m^2\leq\frac{b^2}{a^2}$ أو $m\in\left[-\frac{b}{a},\frac{b}{a}\right]$ تكون ✪ محققة أياً كان $h\in\mathbb{R}$

أما إذا كان $m\in\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{b}{a},\frac{b}{a}\right]$ فإن $h\in\mathbb{R}\setminus\left]-\sqrt{m^2a^2-b^2}\ ,\sqrt{m^2a^2-b^2}\right[$

وجذرا المعادلة هما طرفا الوتر المحرقي

وفاصلة Mمنتصف الوتر المحرقي $[N_1N_2]$هي $x=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}=-\frac{ma^2h}{b^2-m^2a^2}$

نعوض في ① نجد $y=-m\dfrac{ma^2h}{b^2-m^2a^2}-h$ أو $y=-\dfrac{b^2h}{b^2-m^2a^2}$

المناقشة:

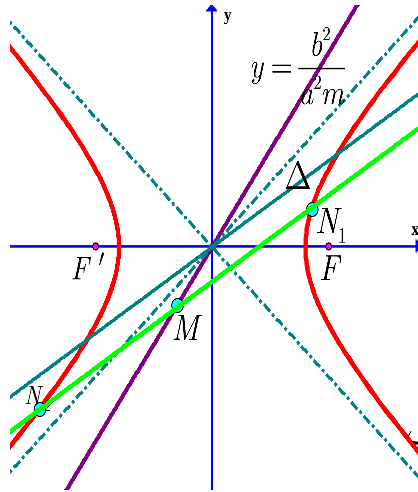
①إذا كان $m\in\left[-\dfrac{b}{a},\dfrac{b}{a}\right]\setminus\{0\}$

المعادلات الوسيطية للنقطة M منتصف الوتر المحرقي $[N_1N_2]$هي

$$\begin{cases} x=-\dfrac{ma^2h}{b^2-m^2a^2} \\ y=-\dfrac{b^2h}{b^2-m^2a^2} \end{cases} \quad : \quad h\in\mathbb{R}$$

بحذف الوسيط $y=\dfrac{b^2}{a^2m}x\ :m\neq 0$ الحامل الهندسي مستقيم فإن وتر القطع يصل نقطة من الفرع الأيمن مع نقطة من الفرع الأيسر

والمحل الهندسي لمنتصفات الأوتار هو المستقيم $y=\dfrac{b^2}{a^2m}x\ :m\neq 0$



②عندما $m=0$ تكون المعادلتان الوسيطيتان $h\in\mathbb{R}$: $\begin{cases} x=0 \\ y=-h \end{cases}$

والمحل الندسي لمنتصفات الأوتار هوالمحور $y\acute{y}$

③ عندما $m\in\mathbb{R}\setminus\left[-\dfrac{b}{a},\dfrac{b}{a}\right]$

المعادلات الوسيطية للنقطة M منتصف الوتر المحرقي $[N_1N_2]$هي

$$\begin{cases} x=-\dfrac{ma^2h}{b^2-m^2a^2} \\ y=-\dfrac{b^2h}{b^2-m^2a^2} \end{cases} \quad : \quad h\in\mathbb{R}\setminus\left]-\sqrt{m^2a^2-b^2}\ ,\sqrt{m^2a^2-b^2}\right[$$

بحذف الوسيط $y=\dfrac{b^2}{a^2m}x$ الحامل الهندسي مستقيم

$x=-\dfrac{ma^2}{b^2-m^2a^2}h$ و $h\in\mathbb{R}\setminus\left]-\sqrt{m^2a^2-b^2}\,,\sqrt{m^2a^2-b^2}\right[$

فإن المحل الهندسي هو المستقيم $y=\dfrac{b^2}{a^2m}x$ عدا القطعة المستقيمة الواقعة في المجال

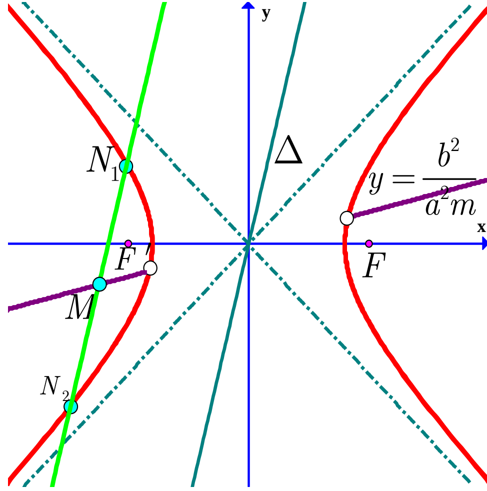
$x=\left]-\dfrac{ma^2}{\sqrt{b^2-m^2a^2}},\dfrac{ma^2}{\sqrt{b^2-m^2a^2}}\right[$ عندما $m>0$

أو المحل الهندسي هو المستقيم $y=\dfrac{b^2}{a^2m}x$

عدا القطعة المستقيمة الواقعة في المجال

$x=\left]\dfrac{ma^2}{\sqrt{b^2-m^2a^2}},-\dfrac{ma^2}{\sqrt{b^2-m^2a^2}}\right[$

عندما $m<0$



③أوجد المحل الهندسي لمراكز الدوائر الماسة لدائرتين متباعدتين خارجاً أو متماستين خارجاً وغير طبوقتين

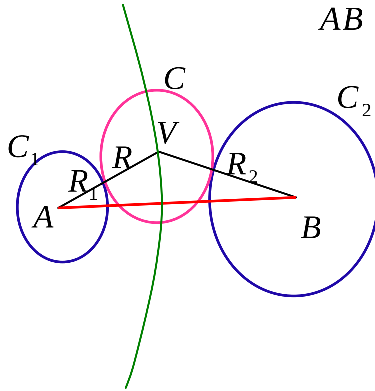
لتكن الدائرتان $C_1(A,R_1)$ و $C_2(B,R_2)$ حيث $AB\geq R_1+R_2$

ولتكن $C(V,R)$ تمس كلا الدائرتين

عندئذ : $AV=R_1+R....①$

و $BV=R_2+R....②$

إذا كان $R_1<R_2$ بطرح ①من ② نجد $BV-AV=R_2-R_1>0$

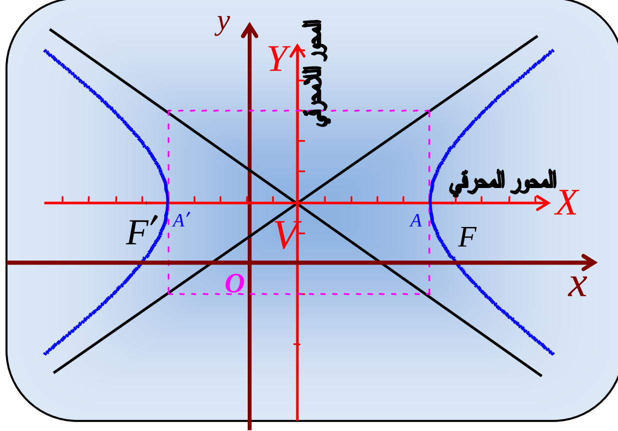


حسب تعريف القطع الزائد مجموعة النقاط V هي فرع قطع زائد محرقاه A,B وهو الفرع الذي يتعلق بالمحرق A

الصيغة القياسية لمعادلة القطع الزّائِد

(تعني معادلة قطع زائد مركزه $V\left(x_0 , y_0\right)$ ومحوره المحرقي يوازي أحد المحورين الإحداثيين)

I المِحور المِحرقي يوازي $x'x$ ، المركِز $V\left(x_0 , y_0\right)$



معادلة القطع في الجملة التي محوراها

$X'VX$, $Y'VY$ هي $\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=1$

حسب دساتير سحب المحاور $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$

نجد الصيغة القياسية لمعادلة القطع الزّائِد هي:

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}-\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1$$

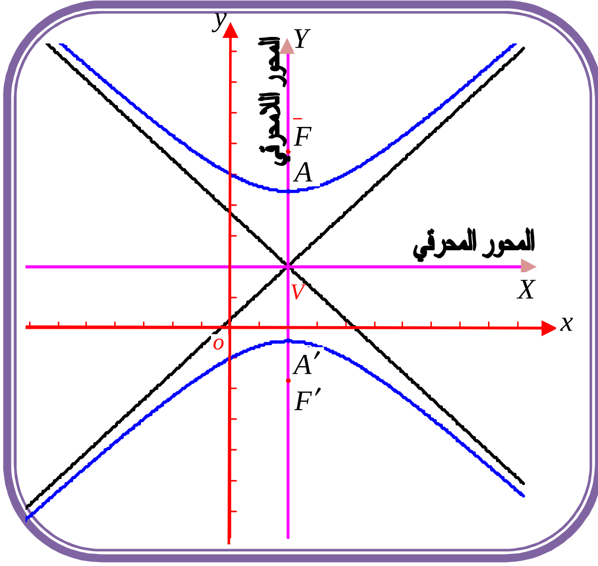
الرأسان : $\left.\begin{array}{l} A\left(x_o + a , y_o\right) \\ A'\left(x_o - a , y_o\right) \end{array}\right\}$ المِحرقان: $\left.\begin{array}{l} F\left(x_o + c , y_o\right) \\ F'\left(x_o - c , y_o\right) \end{array}\right\}$

معادلتا مقاربيه: $\left.\begin{array}{l} y - y_o = \dfrac{b}{a}\left(x - x_o\right) \\ y - y_o = -\dfrac{b}{a}\left(x - x_o\right) \end{array}\right\}$ معادلتا دليليه : $\left.\begin{array}{l} \Delta : x = x_o + \dfrac{a}{e} \\ \Delta' : x = x_o - \dfrac{a}{e} \end{array}\right\}$

نصفا قطريه المِحرقيّين عند نقطة $M\left(x , y\right)$ منه: $\left.\begin{array}{l} r = \left| a - e\left(x - x_o\right)\right| \\ r' = \left| a + e\left(x - x_o\right)\right| \end{array}\right\}$

II المِحور المِحرقي يوازي $y'y$ ، المركِز $V(x_o,y_o)$

إنّ معادلة القطع الزّائِد هي: $\frac{(y-y_o)^2}{a^2}-\frac{(x-x_o)^2}{b^2}=1$



المِحرقان: $\left.\begin{matrix} F(x_o\ ,\ y_o+c) \\ F'(x_o\ ,\ y_o-c) \end{matrix}\right\}$

الرّأسان: $\left.\begin{matrix} A(x_o\ ,\ y_o+a) \\ A'(x_o\ ,\ y_o-a) \end{matrix}\right\}$

معادلتا المقاربين: $\left.\begin{matrix} y-y_o=\frac{a}{b}(x-x_o) \\ y-y_o=-\frac{a}{b}(x-x_o) \end{matrix}\right\}$

معادلتا دليليه: $\left.\begin{matrix} \Delta:\ y-y_o=\frac{a}{e}\ \ ,\ y=y_o+\frac{a}{e} \\ \Delta':\ y-y_o=-\frac{a}{e}\ \ ,\ y=y_o-\frac{a}{e} \end{matrix}\right\}$

نصفا قطريه المِحرقيّين عند نقطة منه $M(x,y)$ هما: $\left.\begin{matrix} r=\left|b-e\,(y-y_o)\right| \\ r'=\left|b+e\,(y-y_o)\right| \end{matrix}\right\}$

ونلخص هذه المعلومات بالجدول الآتي لتسهل المقارنة:

الشكل والمعادلة	الرأسين	المعادلة	المحرقين	الدليلين	نصفا القطرين المحرقين
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$	$A(x_0+a,y_0)$ $A'(x_0-a,y_0)$	$\frac{y-y_0}{b}=\pm\frac{x-x_0}{a}$ يمران بالمركز ميلاهما $\pm\frac{b}{a}$	$F(x_0+c,y_0)$ $F'(x_0-c,y_0)$	$\Delta: x=x_0+\frac{a}{e}$ $\Delta': x=x_0-\frac{a}{e}$	$r=\lvert a-e(x-x_0)\rvert$ $r'=\lvert a+e(x-x_0)\rvert$
$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$	$A(x_0,y_0+a)$ $A'(x_0,y_0-a)$	$\frac{y-y_0}{a}=\pm\frac{x-x_0}{b}$ يمران بالمركز ميلاهما $\pm\frac{a}{b}$	$F(x_0,y_0+c)$ $F'(x_0,y_0-c)$	$\Delta: y=y_0+\frac{a}{e}$ $\Delta': y=y_0-\frac{a}{e}$	$r'=\lvert a+e(y-y_0)\rvert$ $r=\lvert a-e(y-y_0)\rvert$

الصّيغة العامة لمعادلة قطع زائِد

إنّ معادلة قطع زائِد محوره المحرقي $x'x$ ومركزه $V\,(x_o, y_o)$ هي:

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}-\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1 \qquad ...❶$$

ومعادلة قطع زائِد محوره المحرقي $y'y$ ومركزه $V\,(x_o, y_o)$ هي:

$$\frac{(y-y_o)^2}{a^2}-\frac{(x-x_o)^2}{b^2}=1 \qquad ...❷$$

بنشر الأقواس في المعادلتين السابقتين نجد أن كلاً منهما ترد إلى الشّكل:

$$A_1x^2+B_1y^2+C_1x+E_1y+F_1=0 \qquad ...❸$$

حيث أنّ: $A_1 \times B_1 < 0$

والتي تسمى الشّكل العام لمعادلة القطع الزّائِد.

وإذا أُعطينا معادلة من الصيغة ③ نتمم إلى مربع كامل بالنّسبة إلى كلٍ من $x\,,\,y$ وعندئذٍ إما أن تُمثّل قطعاً زائداً أو أن تُمثِّل اجتماع مستقيمين.

مثال 1 :

ليكن القطع الزّائِد الذي معادلته: $16x^2-9y^2-64x-36y=116$ المطلوب:

عين كلاً من محرقيه، رأسيه، واختلافه المركزي ،اكتب معادلتي دليليه، معادلتي مقاربيه واحسب نصفي قطريه المحرقيين عند نقطة منه فاصلتها $x=6$ ، ثُمّ ارسمه وارسم دليليه.

الحل:

$$16x^2-9y^2-64x-36y=116$$
$$16\left(x^2-4x\right)-9\left(y^2+4y\right)=116$$
$$16\left[(x-2)^2-4\right]-9\left[(y+2)^2-4\right]=116$$
$$16(x-2)^2-9(y+2)^2=64-36+116$$
$$16-9(y+2)^2=144$$

$\dfrac{(x-2)^2}{9}-\dfrac{(y+2)^2}{16}=1$ له الصّيغة القياسية $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

مِحوره المِحرقي يوازي $x'x$

مركِزه: $V\ (2,-2)$ $a^2=9\ ,\ b^2=16$ ومنه $a=3\ ,b=4$ ، $c^2=a^2+b^2$ ومنه $c=5$

المِحرقان: $\left.\begin{matrix} F\ (x_o+c\ ,\ y_o)=F\ (7,-2) \\ F'(x_o-c\ ,\ y_o)=F'(-3,-2)\end{matrix}\right\}$ الرأسان: $\left.\begin{matrix} A\ (x_o+a\ ,\ y_o)=A\ (5,-2) \\ A'\ (x_o-a\ ,\ y_o)=A'(-1,-2)\end{matrix}\right\}$

الاختلاف المركزي $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{3}$

معادلتا دليليه: $\begin{cases}\Delta:\ x=x_o+\dfrac{a}{e} \\ \Delta':\ x=x_o-\dfrac{a}{e}\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\Delta: x=\dfrac{19}{5} \\ \Delta': x=\dfrac{1}{5}\end{cases}$

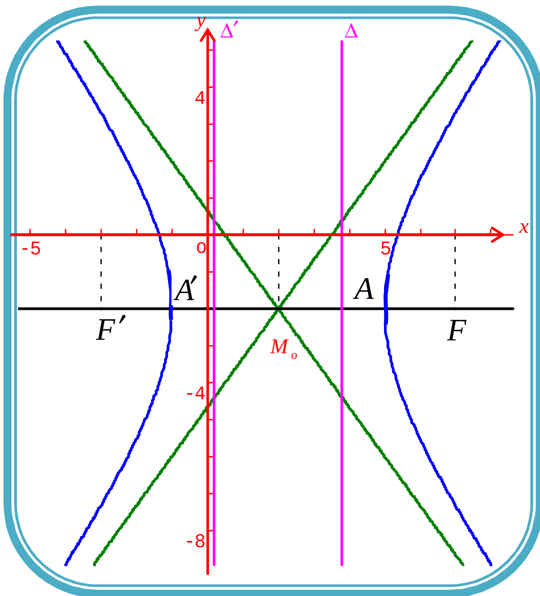
معادلتا مقاربيه: $\dfrac{y-y_o}{b}=\pm\dfrac{x-x_o}{a}$

بالتعويض والإصلاح $\begin{cases}4x-3y-14=0 \\ 4x+3y-2=0\end{cases}$

نصفا قطريه المِحرقيّين لنقطة M منه فاصلتها $x=6$ هما:

$$\left.\begin{matrix} r=\left|a-e\ (x-x_o)\right|=\dfrac{11}{3} \\ r'=\left|a+e\ (x-x_o)\right|=\dfrac{29}{3}\end{matrix}\right\}$$

الرسم:



مثال 2 :

ليكن القطع الزّائِد الّذي معادلته: $\frac{(y+1)^2}{36}-\frac{(x-1)^2}{64}=1$

عيّن محرقيه، ذروتيه،واختلافه المركزي ، معادلتي مقاربيه ومعادلتي دليليه.

واحسب نصفي القطرين المحرقيين عند نقطة من القطع ترتيبها $y=5$ ثُمّ ارسمه وارسم دليليه.

الحل:

المِحور المِحرقي يوازي $y'y$ ، له الصيغة القياسية $\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$ المركِز $V(1,-1)$

$a^2=36$, $b^2=64$ ومنه $a=6$, $b=8$

$c^2=a^2+b^2$ ومنه $c=10$

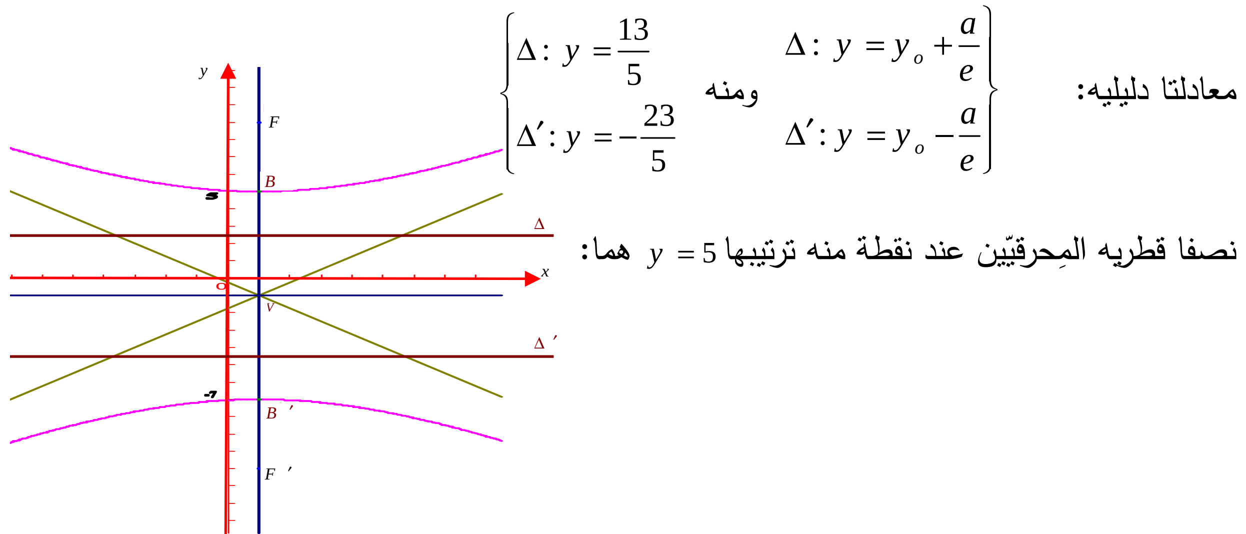
المِحرقان: $\begin{cases} F(x_o, y_o+c)=F(1,9) \\ F'(x_o, y_o-c)=F'(1,-11) \end{cases}$ الرأسان: $\begin{cases} A(x_o, y_o+a)=A(1,5) \\ A'(x_o, y_o-a)=A'(1,-7) \end{cases}$

اختلافه المركزي $e=\frac{c}{b}=\frac{5}{3}$

معادلتا مقاربيه: $\frac{y-y_o}{a}=\pm\frac{x-x_o}{b}$ بالتعويض والإصلاح $\begin{cases} 3x-4y-7=0 \\ 3x+4y+1=0 \end{cases}$

معادلتا دليليه: $\begin{cases} \Delta: y=y_o+\frac{a}{e} \\ \Delta': y=y_o-\frac{a}{e} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \Delta: y=\frac{13}{5} \\ \Delta': y=-\frac{23}{5} \end{cases}$

نصفا قطريه المِحرقيّين عند نقطة منه ترتيبها $y=5$ هما:



$$\left.\begin{aligned} r &= \left|a - \frac{c}{a}(y - y_o)\right| \\ &= \left|6 - \frac{10}{6}(5+1)\right| = 4 \\ r' &= \left|a + \frac{c}{a}(y - y_o)\right| \\ &= \left|6 + \frac{10}{6}(5+1)\right| = 16 \end{aligned}\right\}$$

مثال 3 :

لدينا قطعاً يقبل المستقيم الذي معادلته $5y = 14$ دليلاً ومحرقه المتعلّق بهذا الدليل $F(-1,6)$

وتباعده المركزي $e = \frac{5}{3}$

1) ما نوع هذا القطع، ثُمّ أوجد معادلته بالشكل النموذجي.

2) أوجد معادلة كل من دليله الآخر ومقاربيه وارسمه.

الحل:

بما أنّ $e = \frac{3}{5} > 1$ فالقطع زائد وحسي تعريف القطع $M(x,y) \in H \Leftrightarrow \frac{MF}{MN} = e$

ومنه $(MF) = e(MN)$ أو $(MF)^2 = e^2(MN)^2$ بالتعويض

$(x+1)^2 + (y-6)^2 = \frac{25}{9} \times \frac{(5y-14)^2}{25}$ ومنه $9(x+1)^2 + 9(y-6)^2 = (5y-14)^2$

$$9(x+1)^2 + 9y^2 - 108y + 324 = 25y^2 - 140y + 196$$

$9(x+1)^2 - 16y^2 + 32y = -128$ ومنه $9(x+1)^2 - 16(y^2 - 2y) = -128$

أو $9(x+1)^2 - 16(y-1)^2 = -144$

$$\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x+1)^2}{16}=1$$ وهي من الصيغة: $$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$

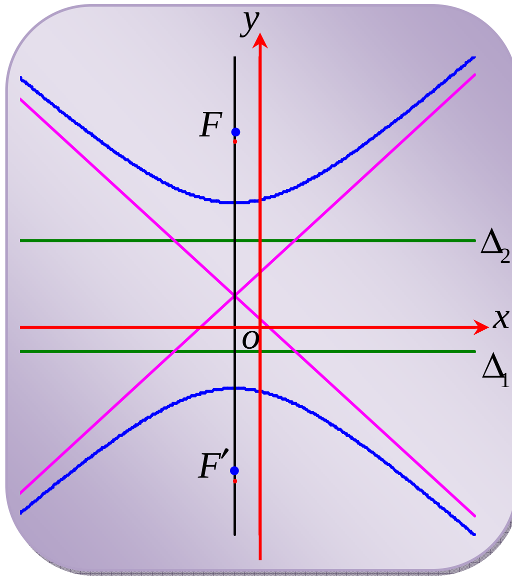
محوره المحرقي يوازي $y\acute{y}$ مركزه $V(-1,1)$

ومنه: $b^2=16$ ، $a^2=9$ أي $b=4$ ، $a=3$ ولدينا $c^2=a^2+b^2=25$ يكون $c=5$

معادلة الدّليل الآخر: $y=y_0-\frac{a}{e}=-\frac{4}{5}$

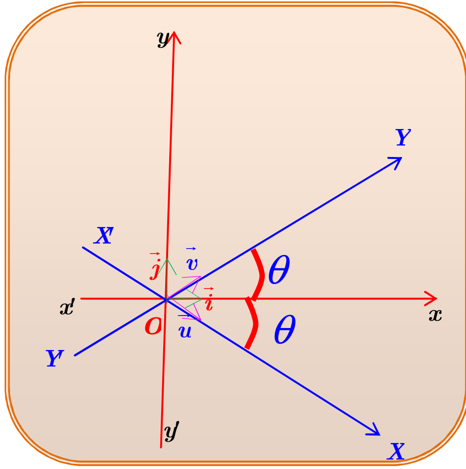
مقارباه:

$$\frac{y-y_0}{a}=\pm\frac{x-x_0}{b}$$



$$\begin{cases}4y+3x-1=0\\4y-3x-7=0\end{cases}$$

معادلة القطع الزائد في جملة الخطين المقاربين



وجدنا في الفصل الرّابع دساتير نقل المحاور

إذا كانت yOy' , xOx' محاور الأساس القانوني $\left(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\right)$

تنصّف الزّاوية بين محاور الأساس $\left(O\,,\vec{u}\,,\vec{v}\right)$ و $\left|\vec{v}\right|=1$

ولتكن $\widehat{XOY}=2\theta$

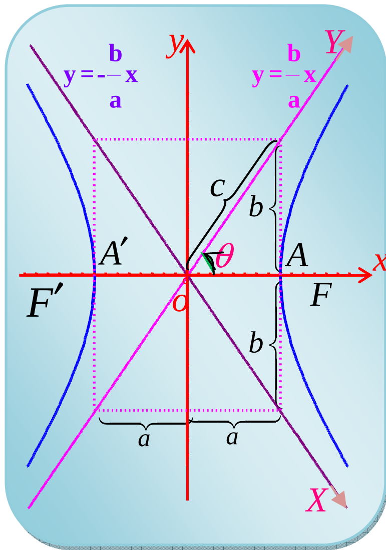
فإن : $\left\{\vec{u}(\cos\theta,-\sin\theta)\ ,\ \vec{v}(\cos\theta,\sin\theta)\right\}$

وعندئذ $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \cos\theta\\ -\sin\theta & \sin\theta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}$

ومنه $x=(X+Y)\cos\theta\ ,\ y=(Y-X)\sin\theta$

من الشّكل المجاور

$$\cos\theta=\frac{a}{c}\ ,\ \sin\theta=\frac{b}{c}$$



ومنه $x=\frac{a}{c}(X+Y)\ ,\ y=\frac{b}{c}(Y-X)$

نعوض في معادلة القطع الزّائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\frac{\left(\frac{a}{c}(X+Y)\right)^2}{a^2}-\frac{\left(\frac{b}{c}(Y-X)\right)^2}{b^2}=1$$

نجري عمليات إصلاح $\frac{\frac{a^2}{c^2}(X+Y)^2}{a^2}-\frac{\frac{b^2}{c^2}(Y-X)^2}{b^2}=1$

بالإصلاح نجد $(X+Y)^2-(Y-X)^2=c^2$ $4XY=c^2$

ومنه $XY=\frac{c^2}{4}$

(هذه الحالة توافق منحني القطع يقع في الرّبعين الأول والثّالث بالنّسبة لمقاربيه)

وعندما تكون معادلة القطع $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

سنجد معادلة القطع $XY=-\frac{c^2}{4}$

(هذه الحالة توافق منحني القطع يقع في الرّبعين الثّاني والرّابع بالنّسبة لمقاربيه)

معادلة قطع زائد متساوي السّاقين منسوب إلى مقاربيه

نقول عن القطع الزائد إنه قطع زائد متساوي الساقين عندما $a=b$

بما أن $a^2+b^2=c^2$ فإنّ $c=a\sqrt{2}$ ويكون اختلافه المركزي $e=\sqrt{2}$

وبما أن معادلة القطع في جملة مقاربيه $XY=\pm\frac{c^2}{4}$ بتعويض $c=a\sqrt{2}$ نجد المعادلة $XY=\pm\frac{a^2}{2}$

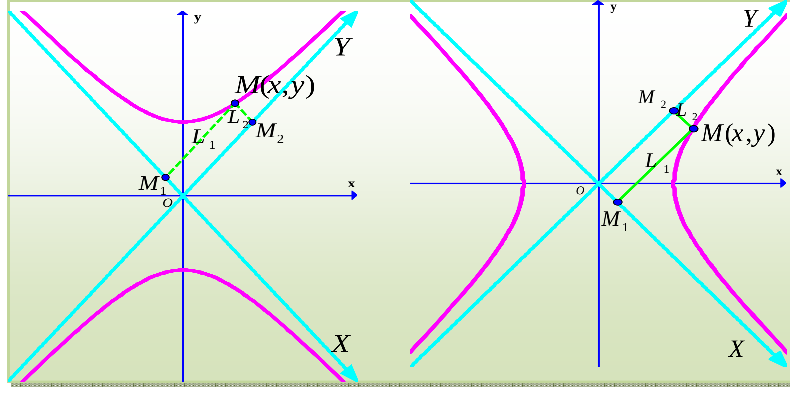
يمكن الوصول لهذه المعادلة بطرق أُخرى:

طريقة أولى:

تكتب معادلته القطع الزّائد المتساوي السّاقين الّذي مركزه $(0,0)$:

$x^2-y^2=a^2$ أو $x^2-y^2=-a^2$ واختصاراً $|x^2-y^2|=a^2$

وعندئذ يكون المستقيمين المقاربين متعامدين هما: $y=-x$, $y=x$



لتكن $M(x,y)$ نقطة تنتمي إلى القطع الزّائِد فإنّ بعد M عن المستقيم المقارب $y+x=0$ هو:

$$L_1 = MM_1 = \frac{|x+y|}{\sqrt{2}}$$

كذلك بعد M عن المستقيم المقارب $y-x=0$ هو: $L_2 = MM_2 = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$

فإذا اتخذنا جملة إحداثيات $X'oX$, $Y'oY$ منطبقة على المقاربين نلاحظ أنّ:

$$L_2 = |X| \quad , \quad L_1 = |Y|$$

وبالتّالي: $L_1.L_2 = \frac{|x+y|}{\sqrt{2}} \times \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$ أو $|X| \cdot |Y| = \frac{|x^2-y^2|}{2} = \frac{a^2}{2}$

ومنه $|X \cdot Y| = \frac{a^2}{2}$

- إذا كان القطع في الرّبعين الأول والثّالث ومعادلته $x^2-y^2=a^2$

أما في جملة المستقيمين المقاربين $X'oX$, $Y'oY$

فإن معادلته $X \cdot Y = \frac{a^2}{2}$ لأن X و Y من إشارة واحدة

- إذا كان القطع في الرّبعين الثّاني والرّابع معادلته $y^2-x^2=a^2$

أما في جملة المستقيمين المقاربين $X'oX$, $Y'oY$

فإن معادلته $X \cdot Y = -\frac{a^2}{2}$ لأن X و Y من إشارتين مختلفتين

طريقة ثانية:

يمكن الوصول إلى النّتيجة ذاتها بإجراء دوران لجملة المحاور الإحداثية لأن الجّملة التي محاورها $X'oX$, $Y'oY$ تنشأ عن الجّملة الّتي محاورها $x'ox$, $y'oy$ بدوران زاويته $\theta = -\frac{\pi}{4}$

ومر معنا في الفصل الرابع التحويلات الهندسية دساتير الدوران

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

أي

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

ومنه

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \;,\; y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$$

بالتّعويض في المعادلة $x^2 - y^2 = \pm a^2$

سنجد $\frac{1}{2}\left[(X - Y)^2 - (X + Y)^2\right] = \pm a^2$ بالإصلاح نجد $X \cdot Y = \pm \frac{a^2}{2}$

التّمثيل الوسيطي لقطع زائِد

نعلم أن معادلة قطع زائِد $\mathcal{H}$ محوره المحرقي يوازي $x'x$ ومركزه $V\,(x_o, y_o)$ هي:

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}-\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1 \qquad ✪$$

وبالموازنة مع المطابقة:

$$\frac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta=1 \quad ...❷ \quad : \theta\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi\kappa : \kappa\in\mathbb{Z}\right\}$$

نضع: $\frac{x-x_o}{a}=\frac{1}{\cos\theta}$

وبالتّالي: ①... $x=x_o+\frac{a}{\cos\theta}$

كذلك: $\frac{y-y_o}{b}=\tan\theta$

وبالتّالي: ②... $y=y_o+b.\tan\theta$

نسمي ① و ②

$$\begin{cases} x=x_o+\frac{a}{\cos\theta} & ...① \\ y=y_o+b.\tan\theta & ...② \end{cases} \quad : \theta\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi\kappa \quad : \kappa\in\mathbb{Z}\right\}$$

المعادلتين الوسيطيّتين للقطع الزّائِد ✪.

مثال:

أوجد المعادلة الديكارتية لمنحنٍ C مُمثّل وسيطيّاً بالمعادلتين:

$$\left.\begin{array}{ll} x=\frac{3}{\cos\theta}-4 & ...❶ \\ y=2\tan\theta-3 & ...❷ \end{array}\right\} \quad \theta\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi\kappa \quad : \kappa\in\mathbb{Z}\right\}$$

وبيِّن أنّها معادلة قطع زائد، عيّن إحداثيّي مركزه

الحل:

من ❶ نجد: $\frac{1}{\cos\theta}=\frac{x+4}{3}$ ومنه: $x+4=\frac{3}{\cos\theta}$ بالتّربيع نجد:

$$\frac{(x+4)^2}{9}=\frac{1}{\cos^2\theta} \quad ...①$$

ومن ❷ نجد: $y+3=2\tan\theta$ ومنه: $\frac{y+3}{2}=\tan\theta$

بالتّربيع نجد: ...② $\frac{(y+3)^2}{4}=\tan^2\theta$

بطرح② من ① نجد أنّ:

$$\frac{(x+4)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$$

وهي معادلة قطع زائد محوره المحرقي يوازي $x'x$ ومركِزه: $V(-4,-3)$

وكذلك أذا كانت معادلة القطع الزّائِد $\mathcal{H}$ محوره المحرقي يوازي $y\acute{y}$ ومركزه $V(x_o,y_o)$ هي:

$$\frac{(y-y_o)^2}{a^2}-\frac{(x-x_o)^2}{b^2}=1 \quad ....✪$$

وبالموازنة مع المطابقة: $:\theta\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi\kappa:\kappa\in\mathbb{Z}\right\}$ $\frac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta=1$

نضع: $\frac{x-x_o}{b}=\tan\theta$ وبالتّالي: ...① $x=x_o+b.\tan\theta$

كذلك: $\frac{y-y_o}{a}=\frac{1}{\cos\theta}$ وبالتّالي: ...② $y=y_o+\frac{a}{\cos\theta}$

نسمي ① و ② $:\theta\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi\kappa \ :\kappa\in\mathbb{Z}\right\}$

$$\begin{cases} x=x_o+b.\tan\theta & ...① \\ y=y_o+\dfrac{a}{\cos\theta} & ...② \end{cases}$$

المعادلتين الوسيطيّتين للقطع الزّائِد ✪.

القطع الزّائد اجتماع دالتين:

لتكن المعادلة $\frac{(x-x_o)^2}{a^2}-\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1$ تكتب $\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=\frac{(x-x_o)^2}{a^2}-1$

ومنه $(y-y_o)^2=\frac{b^2}{a^2}\left((x-x_o)^2-a^2\right)$ أي $y-y_o=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(x-x_o)^2-a^2}$

القطع الزّائد اجتماع دالتين $y=y_0+\frac{b}{a}\sqrt{(x-x_o)^2-a^2}$ و $y=y_0-\frac{b}{a}\sqrt{(x-x_o)^2-a^2}$

وهاتين الدّالتين معرفتين على المجال $]-\infty,x_0-a]\cup[x_0+a,+\infty[$

والمعادلة $\frac{(y-y_o)^2}{a^2}-\frac{(x-x_o)^2}{b^2}=1$ أيضاً اجتماع دالتين

$y=y_0+\frac{a}{b}\sqrt{b^2+(x-x_o)^2}$ و $y=y_0-\frac{a}{b}\sqrt{b^2+(x-x_o)^2}$

وهاتين الدالتين معرفتين على $\mathbb{R}$

أما الخط البياني للدالتين إذا لاحظنا أن معادلة المحور الأفقي للقطع هي $y=y_0$

أحدهما يقع فوق المحور الأفقي للقطع والآخر يقع تحت المحور الأفقي للقطع

(نقط المحور الأفقي نقط مشتركة للدالتين)

وبالعكس الدالة التي معادلتها $y=f(x)$ و $f(x)=\lambda\sqrt{ax^2+bx+c}+\beta$ حيث a,b,c,λ,β أعداد حقيقية و $\lambda\neq 0$ و $a>0$ و $\Delta=b^2-4a\cdot c\neq 0$ تمثل نصف قطع زائد محوره الأفقي $y=\beta$

ويكون خطه البياني فوق المحور الأفقي عندما $\lambda>0$ و تحت المحور الأفقي عندما $\lambda<0$

يكون خطه البياني فرعين عندما $\Delta=b^2-4a\cdot c>0$ وفرع واحد عندما $\Delta=b^2-4a\cdot c<0$

لاحظ عندما $\Delta=b^2-4a\cdot c=0$ المعادلة تمثل اجتماع مستقيمين

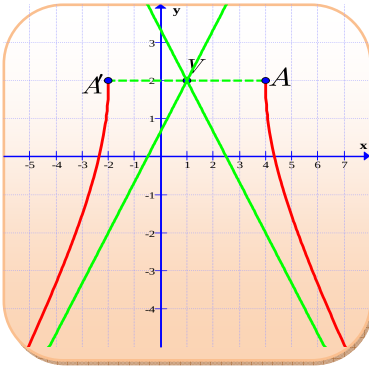
مثال 1 : بين أن مجموعة النقط $M(x,y)$ الممثلة بالمعادلة $y=2-\frac{4}{3}\sqrt{x^2-2x-8}$

هي نصف قطع زائد وارسم مجموعة النقط عين مركز القطع ومحرقيه وارسم الدالة

الحل : تكتب الدالة $y=2-\frac{4}{3}\sqrt{x^2-2x-8}$ على الشكل $y-2=-\frac{4}{3}\sqrt{(x-1)^2-9}$

معرفة بشرط($y-2\leq 0$ و $x^2-2x-8\geq 0$)

أي($y\leq 2$ و $-2\leq x\leq 4$)



بتربيع الطرفين

$$(y-2)^2=\frac{16}{9}\left((x-1)^2-9\right)$$

نكتبها $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$

هذه المعادلة معادلة قطع زائد مركزه $V(1,2)$

محوره المحرقي يوازي $x'x$ مقارباه $\frac{y-2}{4}=\pm\frac{x-1}{3}$

بما أن $y\leq 2$ فإن الخط البياني (مجموعة النقط $M(x,y)$) هي نصف القطع الزائد

$\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$ والواقعة تحت محوره الأفقي (AA') مع طرفي القطر الأفقي A وA'

مثال ❷ : بين أن مجموعة النقط $M(x,y)$ الممثلة بالمعادلة

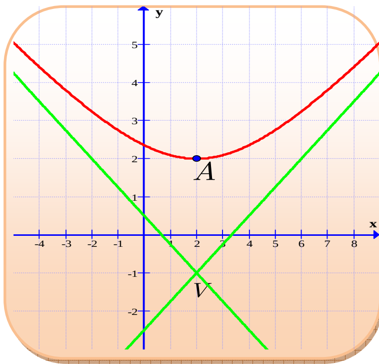
$$y=\frac{3}{4}\sqrt{x^2-4x+20}-1$$

هي نصف قطع زائد وارسم مجموعة النّقط عين مركز القطع ومحرقيه وارسم الدالة

الحل : تكتب الدالة $y=\frac{3}{4}\sqrt{x^2-4x+20}-1$ على الشكل $y+1=\frac{3}{4}\sqrt{(x-2)^2+16}$

معرفة بشرط($y+1\geq 0$ و $x^2-4x+20\geq 0$)

أي($y\geq -1$ و $x\in\mathbb{R}$)



بتربيع الطرفين

$$(y+1)^2=\frac{9}{16}\left((x-2)^2+16\right)$$

نكتبها $\frac{(y+1)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{16}=1$

هذه المعادلة معادلة قطع زائد مركزه $V(2,-1)$

محوره المحرقي يوازي $x'x$ مقارباه $\frac{y+1}{3}=\pm\frac{x-2}{4}$

بما أن $y\geq -1$ فإن الخط البياني (مجموعة النقط $M(x,y)$) هي نصف القطع الزائد

$\frac{(y+1)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{16}=1$ والواقعة فوق محوره الأفقي فهو فرعه الأعلى

ملاحظة :

يمكن إيجاد المستقيمين المقاربين لدالة الجّذر التربيعي $f(x)=\lambda\sqrt{ax^2+bx+c}+\beta$

حيث a,b,c,λ,β **أعداد حقيقية** و $\lambda\neq 0$ و $a>0$ و $\Delta=b^2-4a\cdot c\neq 0$

بطريقة رد المعادلة إلى المعادلة القياسية للقطع الزائد

حيث نكتب معادلة القطع الزّائد $\alpha^2(x-x_o)^2-\beta^2(y-y_o)^2=\pm\alpha^2\beta^2$

نستنتج أن معادلتي المستقيمين المقاربين له هي

$\alpha^2(x-x_o)^2-\beta^2(y-y_o)^2=0$ **أو** $\beta(y-y_o)=\pm\alpha(x-x_o)$

مثال : أوجد معادلتي المستقيمين المقاربين للقطع الزّائد $f(x)=2\sqrt{4x^2+8x+7}-3$

الحل : نكتب المعادلة $y=2\sqrt{4(x+1)^2+3}-3$ أو $\frac{y+3}{2}=\sqrt{4(x+1)^2+3}$

بالتّربيع $\frac{(y+3)^2}{4}=4(x+1)^2+3$ ومنه $(y+3)^2-16(x+1)^2=12$

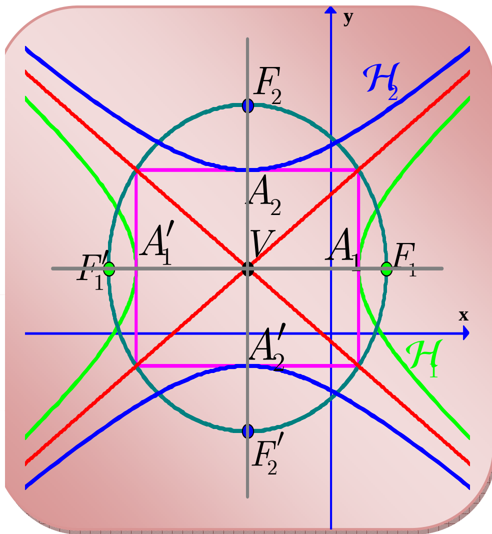
وله مقاربان $(y+3)^2-16(x+1)^2=0$

فمعادلتي المقاربين $y+3=\pm4(x+1)$

القطعين المترفقين: نقول عن قطعين زائدين

أنهما مترافقين إذا وفقط إذا كان لهما

نفس المستقيمين المقاربين و نفس طول البعد المحرقي



في الشكل المجاور $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_1$ مترافقين

نستنتج أنه إذا كان $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_1$ مترافقين

وكانت معادلة القطع الزّائد الأول $\mathcal{H}_1 : \dfrac{(y-y_o)^2}{a^2} - \dfrac{(x-x_o)^2}{b^2} = 1$

فإن معادلة القطع الزّائد المرافق له $\mathcal{H}_2 : \dfrac{(y-y_o)^2}{a^2} - \dfrac{(x-x_o)^2}{b^2} = -1$

قوة نقطة بالنسبة إلى قطع زائد

نعرف قوة نقطة بالنسبة إلى قطع زائد بأنها الفرق بين القيمة المطلقة لفرق بعدي النقطة عن المحرقين وطول البعد بين الرأسين

إذا كان F, F' محرقي قطع زائد والبعد بين رأسيه $2a$ فإن قوة النقطة M بالنسبة لهذا القطع

$$f(M) = |MF' - MF| - 2a$$

نتيجة :

① تكون النقطة M تنتمي للقطع إذا وفقط إذا كانت $f(M) = 0$

لأن $|MF' - MF| = 2a$

② تكون النقطة H داخل القطع إذا وفقط إذا كانت $f(H) < 0$

لأنه حسب المتراجحات في المثلث $|MF' - MF| < 2a$

③ تكون النقطة N خارج القطع إذا وفقط إذا كانت $f(N) > 0$

لأنه حسب المتراجحات في المثلث $|MF' - MF| > 2a$

نتيجة :

عندما نحدث مستوي القطع النّاقص بمعلمٍ متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ بحيث ينطبق المحور $x\acute{x}$ على المحور المِحرقي وموجه من F' إلى F ، والمحور $y\acute{y}$ منطبق على المحور اللامِحرقي والبعد بين رأسي القطع الناقص $AA'=2a$ والبعد المحرقي $FF'=2c$ وكان $b^2=a^2-c^2$ وكانت $M\ (x\ ,y\ )$

فإن $|MF'-MF|=2a$ تكافئ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ وبالتالي فإن إشارة $f\ (M\ )=|MF'-MF|-2a$

من إشارة $f\ (x\ ,y\ )=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1$ والتي تعبر عن قوة النقطة $M\ (x\ ,y\ )$ تحليلياً

وإشارة $f_1(x\ ,y\ )=b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2$ هي أيضاً إشارة $f\ (x\ ,y\ )=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1$

لاحظ :إذا كانت معادلة القطع $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ فإن $f\ (x\ ,y\ )=\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}-1$

أي أنه لمعرفة الوضع النسبي لنقطة $M\ (x_1,y_1)$

بالنسبة لقطع ناقص نكتب معادلة القطع $f\ (x\ ,y\ )=0$

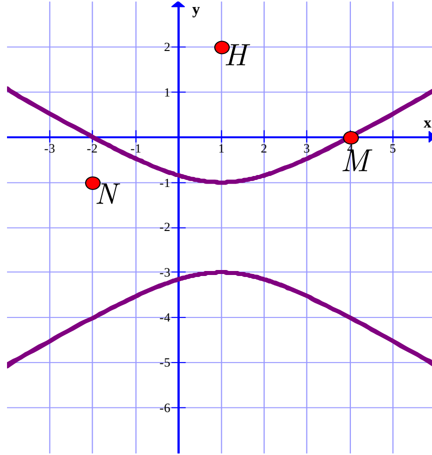
نحسب $f\ (x_1,y_1)$ ونميز الحالات الثلاثة :

1. $f\ (x_1,y_1)>0$ النقطة $H\ (x_1,y_1)$ تقع خارج القطع الزائد
2. $f\ (x_1,y_1)<0$ النقطة $M\ (x_1,y_1)$ تقع داخل القطع الزائد
3. $f\ (x_1,y_1)=0$ النقطة $N\ (x_1,y_1)$ تقع على القطع الزائد

ملاحظة تصلح النتيجة السابقة لكل قطع زائد أياً كان مركزه وأياً كان منحى محوره وأن مركز القطع يقع داخل القطع

ادرس الوضع النسبي للنقاط $M\ (4,0)$ ، $H\ (1,2)$ ، $N\ (-2,-1)$

بالنسبة للقطع الزائد $\frac{(y+2)^2}{1}-\frac{(x-1)^2}{3}=1$



الحل : نكتب $f\ (x,y)=\frac{(y+2)^2}{1}-\frac{(x-1)^2}{3}-1$

$$f\ (4,0)=\frac{(2)^2}{1}-\frac{(4-1)^2}{3}-1$$
$$=4-3-1=0$$

النقطة $M\ (4,0)$ تقع على القطع الزائد

$$f\ (2,2)=\frac{(2+2)^2}{1}-\frac{(1-1)^2}{3}-1$$
$$=16+0-1=15>0$$

النقطة $H\ (1,2)$ تقع خارج القطع الزائد

$$f\ (-2,3)=\frac{(-2+2)^2}{1}-\frac{(-1-1)^2}{3}-1$$
$$=0-\frac{4}{3}-1=-\frac{7}{3}<0$$

النقطة $N\ (-2,-1)$ تقع داخل القطع الزائد

تمرينات القطع الزّائد

1 لتكن المعادلة: $4x^2-9y^2+16x+18y=\lambda \ : \ \lambda\in\mathbb{R}$

① ناقش حسب قيم $\lambda\in\mathbb{R}$ ما تمثله المعادلة السابقة

② من أجل $\lambda=29$ بيّن أنّها معادلة قطع زائد، عيّن مركِز ومِحرقي هذا القطع ورأسيه واكتب معادلتي مقاربيه ومعادلتي دليليه ثُمّ ارسم مقاربيه هندسياً وارسم القطع.

الحل: ①

$$4x^2-9y^2+16x+18y=\gamma$$
$$4\left(x^2+4x\right)-9\left(y^2-2y\right)=\lambda$$
$$4(x+2)^2-9(y-1)^2-7=\lambda$$
$$4(x+2)^2-9(y-1)^2=\lambda+7$$

$\lambda=-7$ نجد المعادلة $4(x+2)^2-9(y-1)^2=0$

وتكتب $4(x+2)^2=9(y-1)^2$

أو $2(x+2)=\pm3(y-1)$

$\begin{cases}2x-3y+7=0\\2x+3y+1=0\end{cases}$ المعادلة تمثل اجتماع مستقيمين

$\lambda\neq-7$ نقسم على $\lambda+7\neq0$ $\quad \dfrac{(x+2)^2}{\frac{\lambda+7}{4}}-\dfrac{(y-1)^2}{\frac{\lambda+7}{9}}=1$ قطع زائد

محوره المحرقي $// \ x'x$ عندما $\lambda>-7$ و محوره المحرقي $// \ y'y$ عندما $\lambda<-7$

② من أجل $\lambda = 29$ نجد المعادلة $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

وهي معادلة قطع زائد من الشكل: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

محوره المحرقي $x'x$ // مركزه $V\ (-2,1)$

$$a^2 = 9 \quad , \quad b^2 = 4$$
$$a = 3 \quad , \quad b = 2$$
$$c^2 = a^2 + b^2 = 13$$
$$c = \sqrt{13}$$

محرقاه: $\left.\begin{array}{l} F(x_0 + c, y_0) = F\left(-2+\sqrt{13},1\right) \\ F'(x_0 - c, y_0) = F\left(-2-\sqrt{13},1\right) \end{array}\right\}$

رأساه: $\left.\begin{array}{l} A(x_0 + a, y_0) = A(0,1) \\ A'(x_0 - a, y_0) = A'(-4,1) \end{array}\right\}$

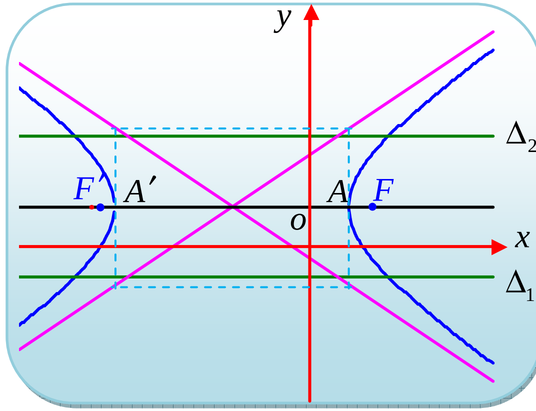
مقارباه:

$$\begin{cases} \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{x-x_0}{a} \\ \dfrac{y-y_0}{b} = -\dfrac{x-x_0}{a} \end{cases}$$

بالتّعويض والإصلاح $\begin{cases} 2x - 3y + 7 = 0 \\ 2x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$

دليلاه:

$$\begin{cases} x = x_0 - \dfrac{a}{e} \\ x = -2 - \dfrac{9\sqrt{13}}{13} \\ x = \dfrac{-26-9\sqrt{13}}{13} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_0 + \dfrac{a}{e} \\ x = -2 + \dfrac{9}{\sqrt{13}} \\ x = \dfrac{-26+9\sqrt{13}}{13} \end{cases}$$



2 ما نوع القطع الذي مركزه $V(2,1)$ ومحرقه $F(2,6)$ ومعادلة دليله المتعلّق بالمحرق F هي $y = \dfrac{14}{5}$

ثم أوجد معادلة القطع

الحل:

بما أنّ الدّليل يقع بين المركز والمحرق فإنّ القطع هو قطع زائد

وبما أنّ $x_0 = x_F = 2$ فإنّ محوره المحرقي $y'y \,//$ ومعادلته من الشكل:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$$

$$V(2,1) \quad , \quad \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

$$F(x_0, y_0 + c) = F(2,6) \quad , \quad \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 + c = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ 1 + c = 6 \end{cases} \quad , \quad c = 5$$

$$\left.\begin{array}{l} y = y_0 + \dfrac{a}{e} \\ y = \dfrac{14}{5} \end{array}\right\}$$

$$y_0 + \frac{a}{e} = \frac{14}{5} \quad , \quad e = \frac{c}{a}$$

$$1 + \frac{a^2}{5} = \frac{14}{5}$$

$$a^2 = 9 \quad , \quad a = 3$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 = 25 - 9 = 16 \quad , \quad b = 4$$

معادلة القطع هي: $\dfrac{(y-1)^2}{9} - \dfrac{(x-2)^2}{16} = 1$

3 أوجد معادلة القطع الزّائد الذي مقارباه $4x + 3y + 1 = 0$, $4x - 3y + 7 = 0$ وأحد محرقيه $1,-4)$

الحل:مركز القطع نقطة تقاطع مقاربيه

بالحل المشترك لمعادلتي المقاربين $7x + 7 = 0$ ومنه $x = -1$

بالتعويض في أحد المقاربين نجد $y = 1$ مركز القطع $V(-1,1)$

المحرق المفروض يقع تحت المركز فالمحور المحرقي يوازي $y\acute{y}$ والمحرق المفروض هو F'

ومنه $y_{F'} = y_0 - c$ أي $-4 = 1 - c$ ومنه $c = 5$

ميل المقارب $\pm\dfrac{a}{b}$ بما أن ميل المقارب المفروض $\pm\dfrac{4}{3}$ نستنتج

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{3}$.......① و لدينا $a^2 + b^2 = c^2 = 25$....② بالحل المشترك لهما $b = 3$, $a = 4$

معادلة القطع هي: $\dfrac{(y-1)^2}{16} - \dfrac{(x+1)^2}{9} = 1$

4 أوجد معادلة القطع الزّائد إذا علم أن $A(6,-1),\ F^{'}(-2,-1),\ e=\frac{5}{3}$

ثُمّ اكتب معادلة المماس لهذا القطع في نقطة منه فاصلتها: $x=8$ وترتيبها $y>0$

ثُمّ أوجد معادلة المماس الآخر الموازي للمماس السّابق.

أنّ $e=\frac{5}{3}>1$ فالقطع زائد $\qquad y_A=y_F=-1$ المحور المحرقي $x'x\ //$

الصّيغة القياسيّة لمعادلة القطع:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

$$y_0=y_A=y_F=-1$$

$$F'(x_0-c,y_0)=F'(-2,-1)$$

$$\left.\begin{aligned} x_0-c&=-2\\ y_0&=-1\end{aligned}\right\}\quad ...❶$$

$$A(x_0+a,y_0)=A(6,-1)$$

$$\left.\begin{aligned} x_0+a&=6\\ y_0&=-1\end{aligned}\right\}\quad ...❷$$

بطرح ❶ من ❷ نجد أنّ: $\qquad a+c=8 \quad ...❸$

لكن

$$\left.\begin{aligned} e&=\frac{c}{a}\\ e&=\frac{5}{3}\end{aligned}\right\}\quad ,\quad \frac{c}{a}=\frac{5}{3}$$

$$c=\frac{5}{3}a \quad ...❹$$

نعوض ❹ في ❸ نجد أنّ:

$$a+\frac{5}{3}a=8$$

$$\frac{8}{3}a=8 \quad \Rightarrow \quad a=3$$

فيكون: $3+c=8 \quad \Rightarrow \quad c=5$

ويكون:

$$x_0+3=6$$

$x_0=3 \quad , \quad V\,(3,-1)$ مركز القطع

$$b^2=c^2-a^2$$

$$b^2=25-9$$

$$b^2=16 \quad \Rightarrow \quad b=4$$

معادلة القطع هي: $\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{16}=1$

من أجل: $x=8$ نعوض

$$\frac{(8-3)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{16}=1$$

$$\frac{25}{9}-\frac{(y+1)^2}{16}=1$$

$$\frac{(y+1)^2}{16}=\frac{25}{9}-1 \quad , \quad (y+1)^2=\frac{16\times16}{9}$$

$$(y+1)^2=\frac{(16)^2}{9}$$

إمّا $y+1=\frac{16}{3}$

$$y=\frac{16}{3}-1 \quad , \quad y=\frac{13}{3}>0$$

نقطة التماس: $M_1\left(8,\frac{13}{3}\right)$ معادلة المماس:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

نشتق معادلة القطع

$$\frac{2(x-3)}{9}-\frac{2(y+1)}{16}y'=0$$

$$\frac{(x-3)}{9}-\frac{(y+1)}{16}y'=0$$

$$\frac{(8-3)}{9}-\frac{\left(\frac{13}{3}+1\right)}{16}y'=0$$

$$\frac{5}{9}-\frac{16}{3\times 16}y'=0$$

$$m=y'=\frac{5}{3}$$

$$y-\frac{13}{3}=\frac{5}{3}(x-8)$$

$$3y-13=5x-40$$

$$3y-5x+27=0$$

بما أنّ القطع الزّائد متناظر بالنّسبة لمركزه فإنّ نظير النّقطة $M_1\left(8,\frac{13}{3}\right)$

هي نقطة التّماس الثّانية:

$$M_1'(2x_0-x,2y_0-y)$$

$$M_1'\left(6-8,-2-\frac{13}{3}\right)$$

$$M_1'\left(-2,-\frac{19}{3}\right)$$

$$y+\frac{19}{3}=\frac{5}{3}(x+2)$$

معادلة المماس الثّاني:

$$3y+19=5x+10$$

$$3y-5x+9=0$$

5 ليكن القطع الزّائد الذي $\mathcal{H}$ علم فيه $A(6,-1),\ F'(-2,-1),\ e=\frac{5}{3}$

❶ أوجد معادلة القطع $\mathcal{H}$ ومعادلتي مقاربيه وارسمه

❷ اكتب معادلة المماس لهذا القطع في نقطة منه فاصلتها: $x=8$ وترتيبها $y>0$

❸ أوجد معادلة المماس الآخر الموازي للمماس السّابق.

الحل:

❶ $y_A=y_{F'}=y_0=-1$ المِحور المِحرقي يوازي $x'x$

والمعادلة لها الصّيغة القياسيّة $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

$e=\frac{c}{a}$ ومنه $\frac{5}{3}=\frac{c}{a}$.......(1)

$A(6,-1)=A(x_0+a,y_0)$ ومنه $x_0+a=6$......(2)

$F'(-2,-1)=F'(x_0-c,y_0)$ ومنه $x_0-c=-2$.....(3)

بطرح (3) من (2) نجد $a+c=8$ منه $c=8-a$ بالتّعويض في (1) نجد $\frac{5}{3}=\frac{8-a}{a}$

وبالتّالي $5a=24-8a$ تكون $a=3$

بالتّعويض في (2) نجد $x_0=3$ وبالتّعويض في (1) نجد $c=5$

و $b^2=a^2-c^2=16$ فيكون $b=4$

معادلة القطع $\mathcal{H}$ هي $\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{16}=1$

ومعادلتي مقاربيه $\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{16}=0$ أو $\frac{y+1}{4}=\pm\frac{x-3}{3}$

فمعادلتي المقاربين $\begin{cases}4x-3y-15=0\\4x+3y-9=0\end{cases}$

❷ نبدل $x=8$ في معادلة القطع نجد $\frac{25}{9}-\frac{(y+1)^2}{16}=1$ ومنه $\frac{(y+1)^2}{16}=\frac{16}{9}$

إما $\frac{y+1}{4}=\pm\frac{4}{3}$ تكون $y=\frac{13}{3}$ مقبول أو $y=\frac{-19}{3}$ مرفوض

نقطة التّماس $N(8,\frac{13}{3})$ نشتق معادلة القطع $\frac{2(x-3)}{9}-\frac{2(y+1)y'_x}{16}=0$

نبدّل إحداثيّات $N(8,\frac{13}{3})$ ونبدل $y'_x=m$ نجد $\frac{5}{9}-\frac{m}{3}=0$ ومنه $m=\frac{5}{3}$

تكون معادلة المماس $y-y_N=m(x-x_N)$ أي $y-\frac{13}{3}=\frac{5}{3}(x-8)$

فالمماس $d: y=\frac{5}{3}x-9$

❸المماس d' الموازي لهذا المماس نظير له بالنسبة لمركز القطع (للمماسين نفس الميل ونقطة تماس d' نظيرة نقطة تماس d بالنسبة إلى مركز القطع) لنحسب إحداثيات N'

نظيرة N بالنسبة إلى مركز القطع $N'(2x_0-x_N,2y_0-y_N)$ أي $N'(-2,-\frac{19}{3})$

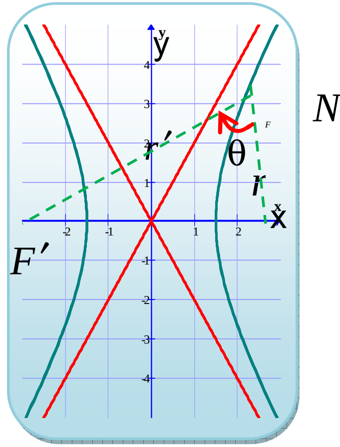
فالمماس $d': y+\frac{19}{3}=\frac{5}{3}(x-8)$ أو $d': y=\frac{5}{3}x-\frac{59}{3}$

6 ليكن القطع الزّائد: $4x^2-y^2-9=0$

1)أوجد إحداثيات ذروتيه وأوجد معادلتي مقاربيه وارسمه.

2)أوجد معادلتي مماسيه اللذين ميل كل منهما 4.

3)إذا كان r , r' نصفي القطرين المحرقيين لنقطة N من القطع وكان محرقاه F,F' فعيّن قياس القطّاع الزّاوي $\left(\widehat{NF, NF'}\right)$ إذا علمت أنّ $r'.r=36$.



الحل: 1) تكتب معادلة القطع $\dfrac{x^2}{\frac{9}{4}}-\dfrac{y^2}{9}=1$

قطع زائد محوره المحرقي $x\acute{x}$ مركزه $o(0,0)$

$a=\dfrac{3}{2}$, $b=3$, $c=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

ذروتيه $A(\dfrac{3}{2},0)$,$A'(-\dfrac{3}{2},0)$

مقارباه $y=2x$ ، $y=-2x$

2) نشتق معادلة القطع نجد $8x-2yy'_x=0$ نبدل فيها $y'_x=m=4$

نجد $y=x$ نبدل في معادلة القطع نجد $x^2=3$ ومنه نقط التماس $M(\sqrt{3},\sqrt{3})$, $M'(-\sqrt{3},-\sqrt{3})$

المماس عند $M(\sqrt{3},\sqrt{3})$: $y-\sqrt{3}=4(x-\sqrt{3})\Rightarrow y=4x-3\sqrt{3}$

المماس عند $M'(-\sqrt{3},-\sqrt{3})$: $y+\sqrt{3}=4(x+\sqrt{3})\Rightarrow y=4x+3\sqrt{3}$

3) حسب قاعدة التّجيب عل المثلث FNF' نجد

$$\cos\theta=\frac{r^2+r'^2-4c^2}{2r.r'}=\frac{(r-r')^2+2r.r'-4c^2}{2r.r'}=\frac{4a^2+2r.r'-4c^2}{2r.r'}=\frac{2r.r'-4b^2}{2r.r'}$$

$\cos\theta = \frac{72-36}{72} = \frac{1}{2}$ وما يناسب المثلث $\theta = 60^\circ$

7 : قطع زائد $\mathcal{H}$ علم دليلاه ومحرقه $F(3,-1),\ \Delta' : 2x-1=0,\ \Delta : 2x-3=0$

① أوجد معادلة القطع ومحرقه الآخر ورأسيه ومقاربيه وارسمه

② أوجد معادلة كل مستقيم مماس للقطع وميله $m=2$ وعين نقط التّماس

③ تحقق أن النّقطة $N(-1,2)$ تقع على القطع وأوجد معادلة المستقيم D المماس للقطع في هذه النّقطة وأوجد معادلة المماس الآخر الموازي لهذا المماس

④ برهن أن المستقيم المماس D منصف داخلي للقطّاع الزاوي $\widehat{FNF'}$

⑤ إذا كان d , d' مماسي القطع في رأسيه A , A' وكان المماس قاطع لهذين المماسين في O, M برهن أن القطعة المستقيمة $[MO]$ ترى من المحرق F ضمن زاوية قائمة

الحل:

① بموازنة الدليلين المفروضين $\Delta' : 2x-1=0,\ \Delta : 2x-3=0$

مع الصّيغة القياسيّة لهما $\Delta' : x = x_0 - \frac{a}{e},\ \Delta : x = x_0 + \frac{a}{e}$ نستنتج أنّ:

المحور المحرقي للقطع يوازي المحور $x'x$ والصّيغة القياسيّة لمعادلته

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

وأن
$$\begin{cases} \frac{1}{2} = x_0 - \frac{a}{e} \ldots\ldots ❶ \\ \frac{3}{2} = x_0 + \frac{a}{e} \ldots\ldots ❷ \end{cases}$$

وبجمع ❶ مع ❷ نجد $2x_0 = 2$ ومنه $x_0 = 1$ بالتعويض في ❶ نجد $\frac{a}{e} = \frac{1}{2} \ldots ❸$

من إحداثيات المحرق $F(3,-1) = F(x_0+c, y_0)$ نستنتج أن $c=2$, $y_0 = -1$ وبما أن $\frac{c}{a} = e$

أي $e=\frac{2}{a}$ بالتعويض في ❸.... $\frac{a}{e}=\frac{1}{2}$ نجد $a=1$

وبما أن $b^2=c^2-a^2=3$ أي $b=\sqrt{3}$

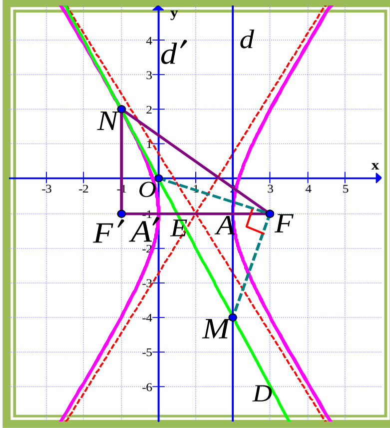
ومعادلة القطع $\frac{(x-1)^2}{1}-\frac{(y+1)^2}{3}=1$

محرقه الآخر $F'(x_0-c,y_0)=F'(-1,-1)$

رأسيّ القطع $A'(x_0-a,y_0)=A'(0,-1)$, $A(x_0+a,y_0)=A(2,-1)$

مقاربيّ القطع $\frac{y-y_0}{b}=\pm\frac{x-x_0}{a}$

بالتعويض $y=\pm\sqrt{3}(x-1)-1$



② نشتق معادلة القطع $\frac{2(x-1)}{1}-\frac{2(y+1)y'}{3}=0$

نعوض $y'=m=2$ نجد ❶..... $(x-1)=\frac{2(y+1)}{3}$

نعوض في معادلة القطع $\frac{4(y+1)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{3}=1$

ومنه $\frac{(y+1)^2}{9}=1$ أي $y+1=\pm 3$

إما $y=2$ نبدل في ❶ نجد $x=3$ نقطة التماس الأولى $M_1(3,2)$

إما $y=-4$ نبدل في ❶ نجد $x=-1$ نقطة التماس الأولى $M_2(-1,-4)$

المماس في $M_1(3,2)$: $y-2=2(x-3)$ ومنه $y=2(x-2)$

المماس في $M_2(-1,-4)$: $y+4=2(x+1)$ ومنه $y=2(x-1)$

③ نعوض $N(-1,2)$ نجد $\frac{(-1-1)^2}{1}-\frac{(2+1)^2}{3}=1$ ومنه $4-3=1$ محقق

نشتق معادلة القطع $\frac{2(x-1)}{1}-\frac{2(y+1)y'}{3}=0$

نعوض $N(-1,2)$ نجد $\frac{2(-1-1)}{1}-\frac{2(2+1)m}{3}=0$ ومنه $m=-2$

معادلة المماس $y-y_N=m(x-x_N)$

بالتّعويض $y-2=-2(x+1)$ أي $D: y=-2x$

و معادلة المماس الآخر الموازي لهذا المماس له نفس الميل $m=-2$

ونقطة التماس N' نظيرة N بالنسبة إلى V ومنه

$N'(2x_0-x_N, 2y_0-y_N)=(3,-4)$ والمماس عندها $y+4=-2(x-3)$ أو $y=-2x+2$

④ المماس $D: y=-2x$ يقطع المحور المحرقي $y=-1$ في النقطة $E(\frac{1}{2},-1)$

$$\frac{NF}{NF'}=\frac{\sqrt{(x_F-x_N)^2+(y_F-y_N)^2}}{\sqrt{(x_{F'}-x_N)^2+(y_{F'}-y_N)^2}}=\frac{5}{3}$$

وبما أن

$$\frac{FE}{F'E}=\frac{|x_F-x_E|}{|x_{F'}-x_E|}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3}$$

ومنه $\frac{NF}{NF'}=\frac{EF}{EF'}$ فالمماس D منصف داخلي للقطّاع الزّاوي $\widehat{FNF'}$

⑤إذا كان d , d' مماسي القطع في رأسيه A , A' فإن معادلتيهما $d: x=2$, $d': x=0$

والمماس D يقطع $d: x=2$ في $M(2,-4)$ ويقطع $d': x=0$ في $O(0,0)$

ويكون $\overrightarrow{FO}(3,-1)$, $\overrightarrow{FM}(-1,-3)$

ومنه $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FO}=-3+3=0$ أي أن $\widehat{FMO}=\frac{\pi}{2}$

ومنه القطعة المستقيمة $[MO]$ ترى من المحرق Fضمن زاوية قائمة

تمرين أوجد معادلة القطع الزّائد الذي معادلة مِحوره المِحرقي $y=2$ ومعادلة أحد دليليه $x=\frac{29}{5}$

ومعادلة أحد مقاربيه $4x-3y-10=0$

الحل: مِحوره المِحرقي $y=2$ فهو يوازي $x'x$ فيكون $y_0=2$ والمعادلة من الشكل

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ ، المِحور المِحرقي يقطع المستقيم المقارب للقطع في V مركز القطع نبدل

$y=2$ في معادلة المستقيم المقارب نجد $x=4$ تكون $V(4,2)$ وأحد دليليه $x=\frac{29}{5}$ يقع على يمين

المركز فهو $\Delta:x_0+\frac{a}{e}$ يكون $x_0+\frac{a}{e}=\frac{29}{5}$ ومنه $\frac{a}{e}=\frac{9}{5}$..........①

ميل المستقيم المقارب $|m|=\frac{b}{a}$

لكن ميل المستقيم المقارب المفروض $m=\frac{4}{3}$ نستنتج $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$..........②

وفي القطع الزّائد $a^2+b^2=c^2=a^2e^2$.....③ من ① نجد $e=\frac{5a}{9}$ ومن②نجد $b=\frac{4a}{3}$ نبدل في ③

ومنه $a^2+\frac{16a^2}{9}=\frac{25a^4}{81}$ أي $\frac{25a^2}{9}=\frac{25a^4}{81}$ ومنه $a=3$ ومن ② نجد $b=\frac{4a}{3}=4$

فالمعادلة $\frac{(x-4)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$

لاتنسونا من صالح دعائكم

وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين

الأستاذ أحمد أبو نبوت